

**Normanda Daniela
Martins Simões**

Grandes deslocamentos na flexão de vigas

**Normanda Daniela
Martins Simões**

Grandes deslocamentos na flexão de vigas

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestrado em Engenharia Mecânica, realizada sob orientação científica de Francisco Queirós de Melo, Professor Associado do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro e de Rui Pedro Ramos Cardoso, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro.

O júri / The jury

Presidente / President

Prof. Doutor Alfredo Manuel Balacó de Moraes

Professor Associado da Universidade de Aveiro da Universidade de Aveiro

Vogais / Committee

Prof. Doutor José Luís Soares Esteves

Professor Auxiliar da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (arguente)

Prof. Doutor Francisco Queirós de Melo

Professor Associado da Universidade de Aveiro (orientador)

Prof. Doutor Rui Pedro Ramos Cardoso

Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro (co-orientador)

Agradecimentos / Acknowledgements

A realização deste trabalho foi algo que não dependeu só de mim mas de todos aqueles que me rodearam e apoiaram.

Desta forma, as minhas palavras de agradecimento são especialmente dirigidas ao Prof. Doutor Queirós de Melo, não só pela sua excelente orientação e constante disponibilidade como pela amizade construída ao longo deste tempo de trabalho.

Ao Prof. Doutor Rui Cardoso, pela amizade, incentivo e cooperação neste trabalho.

Ao Prof. Doutor José Grácio, pela amizade e interesse que demonstrou pelo trabalho realizado

A todos os meus amigos.

Aos meus pais, à minha irmã, cunhado e sobrinhos, pela paciência, apoio e forte incentivo para que este meu sonho se tornasse realidade.

A TODOS MUITO OBRIGADA!

Normanda

Palavras-chave

Elemento de Viga; Integração reduzida; Não linearidade geométrica; Grandes deslocamentos; Newton-Raphson

Resumo

Esta tese descreve o desenvolvimento e implementação de um programa de computador de um elemento de viga de 2 nós para simular grandes deslocamentos em condições de não linearidade geométrica. O modelo de Euler-Bernoulli e Timoshenko-Mindlin serviu de base para a formulação dos elementos finitos mencionados, embora com maior destaque no modelo de Mindlin, tendo em conta as vantagens na sua formulação, detalhadas no texto. A fim de evitar o fenómeno retenção da deformação de corte transversal do elemento de viga (*shear locking*) utiliza-se integração reduzida apenas nos termos associados a energia por corte na formulação da matriz de rigidez. Os problemas analisados no trabalho contemplam apenas uma análise não linear geométrica. A solução para grandes deslocamentos, mas com esforços moderados é obtida de modo incremental com actualização do referencial local e verificação das condições de equilíbrio com o método de Newton-Raphson. Como desenvolvimento futuro apresenta-se as linhas essenciais para efectuar uma análise dinâmica de vigas com grandes deslocamentos.

Keywords

Beam Element; Reduced integration; Geometric Nonlinearity; Large displacements; Newton-Raphson

Abstract

This work describes the development and implementation in a computer program of 2-node beam finite elements to simulate large displacements in non-linear geometric conditions. The Euler Bernoulli and Reissner-Mindlin deformation models served as basis to formulate the mentioned finite elements, though a major development was focused on the Mindlin model, given its formulation advantages detailed in the text. In this case, precautions were taken in order to avoid the Shear Locking phenomenon, using selective reduced integration (with shear terms in the stiffness matrix). The problems analysed only involve non-linear geometric behaviour, not including any material plastic constitutive change. The solution for large displacement but moderate strains is carried out with the Newton-Raphson method, updating the local reference system of each element past each iteration. As future development of this solution, dynamic applications in regime of large amplitude vibration of beams will be carried out.

Mots-clés

Éléments de poutre, intégration réduite, non-linéarité géométrique, grands déplacements, Newton-Raphson

Résumé

Cette thèse décrit le développement et l'application d'un programme informatique d'un élément de poutre avec 2 nœuds pour simuler des grands déplacements en situations de non-linéarité géométrique. La théorie d'Euler-Bernoulli et Timoshenko-Mindlin a servi de base pour la formulation des éléments finis mentionnés, mais plus particulièrement la théorie de Mindlin, si on considère les avantages présentés dans sa formulation, détaillés dans le texte. Afin d'éviter le phénomène de tenseur des déformations de la coupe transversale de l'élément (*shear locking*) , on utilise l'intégration réduite seulement dans les termes associés à une réduction de la formulation de la matrice de rigidité. Les problèmes abordés dans cette étude ne prennent en compte qu'une analyse géométrique non linéaire.

Conteúdo

I	Enquadramento	1
1	Objectivos	3
2	Revisão sobre a investigação em modelos de flexão de estruturas tipo viga	5
2.1	O estado da arte inicial	7
II	Formulação não linear de elementos de viga	13
3	O elemento de Hermite	15
3.1	Considerações essenciais. O campo de deslocamentos	15
3.2	O algoritmo matricial de solução	16
3.2.1	Problema Linear	16
3.2.2	Formulação não-linear geométrica, para o elemento de Hermite . .	20
3.2.3	A solução iterativa; linearização da matriz do sistema de equações	25
3.3	Síntese da formulação do elemento	29
4	O elemento de Timoshenko	31
4.1	Considerações essenciais. O campo de deslocamentos	31
4.2	Formulação do campo de deformações	32
4.2.1	Pequenas deformações (modelo linear)	32
4.2.2	Deformações moderadas (modelo não linear geométrico)	33
4.3	A matriz de rigidez: Formulação pela variação da energia de deformação .	34
4.3.1	Solução Linear Elástica	34
4.3.2	Deformações não lineares: solução não linear geométrica (vigas elásticas)	37
4.4	Síntese sobre o método de Newton-Raphson em problemas não linear-geométricos	42
III	Implementação FORTRAN90	43
5	Cálculo automático da solução iterativa	45
5.1	Estrutura do programa FORTRAN90	45
5.2	Diagrama de sequência do programa de cálculo	46
5.3	Exemplos	47

5.3.1	Elemento de formulação hermitiana: Força transversal	47
5.3.2	Elemento de formulação Timoshenko-Mindlin: Força transversal . .	48
5.3.3	Elemento de formulação hermitiana: Momento puro no extremo livre	48
5.3.4	Elemento de formulação Timoshenko-Mindlin: Momento puro no extremo livre	49
5.4	Verificação experimental	49
5.4.1	Resultado numérico	52
IV	Conclusão	55
V	Futuro desenvolvimento	59
6	Tópicos avançados e futuro desenvolvimento do tema	61
6.1	Sumário sobre o desempenho dos elementos analisados	61
6.2	Desenvolvimento do tema: aplicação às vigas laminadas	61
6.3	Aplicações dinâmicas	62
6.4	Formulação do problema dinâmico de grandes deslocamentos em vigas . .	63
A	Flexão de viga encastrada com força transversal no extremo livre	69
A.1	Euler-Bernoulli	69
A.2	Timoshenko-Mindlin	69
B	Viga encastrada sob flexão pura	73
B.1	Formulação Hermitiana	73
B.2	Formulação Timoshenko-Mindlin	73
C	Verificação experimental	77
C.1	Formulação Hermitiana	77
C.2	Formulação Timoshenko-Mindlin	77

Lista de Tabelas

A.1	Flexão de viga encastrada com força transversal no extremo livre (elemento de Euler-Bernoulli)	70
A.2	Flexão de viga encastrada com força transversal no extremo livre (elemento de Timoshenko-Mindlin)	71
B.1	Viga encastrada sob flexão pura ($100Nm$), (Hermitiana) momento aplicado em 10 incrementos ($10Nm$ cada)	74
B.2	Viga encastrada sob flexão pura ($100Nm$), (Timoshenko-Mindlin) momento aplicado em 10 incrementos ($10Nm$ cada)	75
C.1	Resultado numérico, modelo ensaiado (Hermitiana)	78
C.2	Resultado numérico, modelo ensaiado (Timoshenko-Mindlin)	79

Lista de Figuras

2.1	Autocarros com estrutura autoportante, painéis reforçados com elementos de viga; <i>Bus Body Monocoque</i>	5
2.2	Autocarros com estrutura autoportante, painéis reforçados com elementos de viga; <i>Framed Body</i>	6
2.3	Criança com cana de pesca; de notar o grande deslocamento da cana . . .	7
2.4	Leonhard Euler (a) e Daniel Bernoulli (b)	7
2.5	Deformação de uma viga: parâmetros diferenciais	8
2.6	Teste de flexão estática nas asas do Boeing 787 onde se pode verificar a impressionante flexibilidade da estrutura (vista lateral)	10
2.7	Teste de flexão estática nas asas do Boeing 787 onde se pode verificar a impressionante flexibilidade da estrutura (vista frontal)	10
3.1	Representação do elemento de viga com deslocamentos por polinómios hermitianos cúbicos	15
3.2	Elemento de viga; posição inicial e final	21
3.3	Exemplo gráfico de iteração pelo método de Newton-Raphson (matrix tangente)	24
3.4	Exemplo gráfico de iteração pelo método de Newton-Raphson (matrix tangente), (cont.)	25
3.5	Evolução aproximada da relação força-deslocamento no extremo livre de uma viga encastrada	26
3.6	Esquema de iteração de Newton-Raphson numa estrutura com rigidez crescente	29
4.1	Elemento de viga Timoshenko com dois nós	31
4.2	Elemento de viga; posição inicial e final	33
4.3	Esquema de iteração de Newton-Raphson com matriz secante numa estrutura com rigidez crescente	41
4.4	Algoritmo de iteração pelo método do sistema 4.27 sem controlo do equilíbrio em relação ao vector efectivo de reacções internas	42
5.1	Diagrama de sequência do problema iterativo de flexão da viga com o Método de Newton-Raphson	46
5.2	Flexão de viga encastrada com força transversal no extremo livre, comparação com solução linear (elemento de Euler-Bernoulli)	47
5.3	Flexão de viga encastrada com força transversal no extremo livre (elemento de Timoshenko-Mindlin)	48

5.4	Viga encastrada sob flexão pura ($100Nm$), (Hermitiana) momento aplicado em 10 incrementos ($10Nm$ cada); comparação com solução linear . .	49
5.5	Viga encastrada sob flexão pura ($100Nm$), (Timoshenko-Mindlin) momento aplicado em 10 incrementos ($10Nm$ cada)	49
5.6	Montagem Experimental	51
5.7	Ensaio Experimental	52
5.8	Resultado numérico, modelo ensaiado (Hermitiana)	53
5.9	Resultado numérico, modelo ensaiado (Timoshenko-Mindlin)	53
6.1	A atleta Kym Howe (Australia) na prática do salto à vara (Jogos Olímpicos, Beijing 2008)	62

Parte I

Enquadramento

Capítulo 1

Objectivos

Com este trabalho pretende-se implementar um programa de cálculo para quantificar a deformada de uma viga quando uma carga transversal lhe é aplicada. Este problema restringe-se a solicitações estáticas, contudo prevê o comportamento estrutural em regime de grandes deslocamentos. A fim de certificar a precisão do modelo numérico proposto, realizaram-se experiências muito simples mas elucidativas quanto à precisão dos resultados obtidos.

Tendo este tema uma forte motivação para progresso na análise dinâmica, são apontadas, ainda que de modo sintético, as linhas para desenvolvimento futuro do comportamento dinâmico de vigas sob grande amplitude de vibração.

Capítulo 2

Revisão sobre a investigação em modelos de flexão de estruturas tipo viga

O comportamento de elementos estruturais tipo viga foi desde cedo considerado um estudo de elevada importância, pela sua aplicação em muitos projectos de estruturas e frequentemente como acessórios de substituição em conjuntos estruturais mais complexos e caros de obter. Por exemplo, a carroçaria de autocarros é realizada por alguns construtores segundo o conceito de estrutura autoportante; porém sendo esta opção atractiva ela é dispendiosa na medida em que exige conformação de chapa e grandes linhas de soldadura. Como alternativa podem ser usados longos painéis formados por longarinas eventualmente combinados com chapas metálicas finas ou material compósito. As referidas longarinas, não sendo directamente destinadas a esforços de viga, podem absorver flexão e corte, sendo este projecto mais económico do que o autoportante.



Figura 2.1: Autocarros com estrutura autoportante, painéis reforçados com elementos de viga; *Bus Body Monocoque*

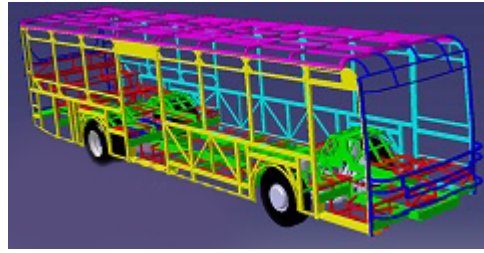


Figura 2.2: Autocarros com estrutura autoportante, painéis reforçados com elementos de viga; *Framed Body*

Um elemento de viga consiste na realidade num corpo onde se regista um estado de tensão aproximadamente plano, constituindo tal um problema bidimensional no conceito da ciência de Mecânica dos Sólidos e de Estruturas. A integração do estado de tensão assim gerado para obtenção de esforços resultantes e momentos permite a abordagem do problema da flexão de vigas como ele é mais conhecido. Quer dizer que em qualquer secção transversal (normal ao eixo médio da viga) deve-se ter:

- Esforços Axiais: é a resultante do integral das tensões paralelas ao eixo da viga sobre a secção transversal
- Esforços Transversos: é a resultante do integral das tensões tangenciais (segundo o plano da secção; perpendiculares ao eixo da viga) sobre a secção transversal
- Momento Flector: é o integral sobre a secção transversal dos momentos elementares por parte das tensões em relação ao eixo de flexão

No dimensionamento de estruturas, o principal objectivo do engenheiro projectista é o de minimizar as distorções dos conjuntos geométricos a fim de:

- Assegurar o estado de tensão dentro dos limites de segurança
- Garantir que mecanismos tenham os seus elementos em movimentos sem atritos, o que prejudicaria a eficiência mecânica e a duração

No entanto há excepções a estas linhas de orientação para projecto, as quais garantem que os conjuntos estruturais tenham uma flexibilidade dentro de padrões de segurança. Entre estes casos estão as asas de aviões (desenhadas com uma elevada relação rigidez/massa, necessitando de certa flexibilidade a fim de cumprir com um critério de massa mínima) e alguns acessórios de actividade desportiva como as canas de pesca e a vara para o salto.



Figura 2.3: Criança com cana de pesca; de notar o grande deslocamento da cana

2.1 O estado da arte inicial

O homem primitivo teve ao dispor a primeira arma de defesa ou caça, a qual consistia de facto numa viga. Tais acessórios eram retirados principalmente das árvores, trabalhando o tronco mais ou menos rectilíneo. A Natureza, proporcionando as árvores como elemento estrutural base, permitiu a construção de habitações, navios, fortificações e pontes, que foram as estruturas de comunicação em acidentes naturais de transposição difícil.

A evolução do intelecto proporcionou dramático avanço nos meios de investigação o que aliado à ambição do saber, motivou em particular no assunto em discussão, que investigadores de reconhecido mérito lançassem as bases científicas sobre análise do comportamento de vigas. Se passarmos directamente às ferramentas de modelação matemática na interpretação do fenómeno físico, Leonhard Euler e Daniel Bernoulli (retomando trabalhos anteriores por Jacob Bernoulli, irmão), por volta de 1750, merecem indubitavelmente um lugar de destaque na História da Mecânica de Estruturas.

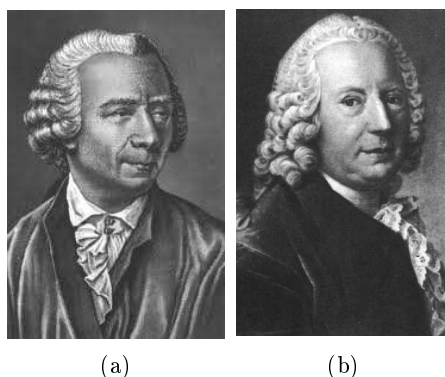


Figura 2.4: Leonhard Euler (a) e Daniel Bernoulli (b)

A equação da deformação de vigas elásticas tinha naturalmente hipóteses simplificadoras; contudo tal equação é tão rigorosa que ainda na actualidade permite projectar com segurança estruturas envolvendo elementos de viga, quer em regime estático quer dinâmico. Reservando os capítulos seguintes para maior pormenor neste ponto, descrevem-se

para já as hipóteses que permitem desenvolver o modelo de deformação de vigas como se segue:

- Sendo uma viga um componente estrutural em que a maior dimensão é o comprimento (comparado com as dimensões da secção transversal), a seguinte terminologia é fundamental para criar e organizar uma metodologia no modelo matemático. O comprimento da viga é a dimensão linear orientada segundo uma linha que define a maior dimensão, sendo esta linha o *eixo da viga*. Este eixo é perpendicular às secções transversais, chamando-se secção transversal à área plana obtida por corte normalmente ao eixo da viga (supõe-se que se trata apenas de vigas rectas)
- As dimensões da secção transversal devem ser definidas sobre um *referencial ortornormado*, o qual tem um sistema de eixos orientado segundo as seguintes direcções: o eixo da viga, uma direcção normal, de preferência orientada segundo um eixo principal de inércia da secção transversal e o terceiro eixo normal ao plano definido pelos anteriores.
- O conceito de curvatura de uma viga (na sua forma deformada por efeito de esforço de flexão) é um parâmetro de primeira importância como se pode ver adiante neste trabalho. A curvatura mede fisicamente a intensidade da deformação como consequência do sistema de forças transversais e momentos aplicados. Estes parâmetros estão associados à inclinação da linha neutra (ou baricêntrica) da viga em relação à linha recta original, tal como mostra a figura 2.5.

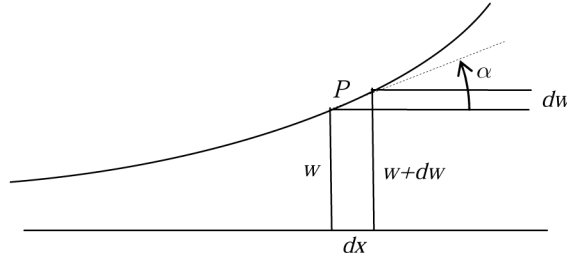


Figura 2.5: Deformação de uma viga: parâmetros diferenciais

Pela figura anterior vê-se que a inclinação da linha deformada da viga é:

$$\tan \alpha = \frac{dw}{dx} \quad (2.1)$$

onde $\alpha = \arctan\left(\frac{dw}{dx}\right)$.

Na secção adjacente ao ponto onde se avalia a inclinação (2.1), à distância dx , o ângulo α passa a ser $\alpha + d\alpha$; logo a inclinação passa a ser $\tan(\alpha + d\alpha)$. A variação desta inclinação é a curvatura da viga no ponto P:

$$(\tan \alpha)' = \frac{\tan(\alpha + d\alpha) - \tan \alpha}{dx} \approx \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\arctan \left(\frac{dw}{dx} \right) \right) = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)} \quad (2.2)$$

Quando se trabalha com pequenos deslocamentos, o termo $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \lll 1$, de modo que (2.2) pode ser assim modificada sem perda de rigor:

$$(\tan \alpha)' = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.3)$$

Esta expressão é integrada na equação da linha elástica, que relaciona os momentos flectores na viga com a curvatura deste modo:

$$\frac{d(\tan \alpha)}{dx} = -\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (2.4)$$

A análise que acaba de ser resumida deve-se a Euler, que verificando a impossibilidade de obter solução analítica com a equação da linha elástica (2.4) usando a expressão da curvatura (2.2), optou por recorrer a (2.3) que levava a muito bom rigor se os deslocamentos fossem considerados pequenos (por exemplo, até 10% do comprimento da viga entre apoios), caso contrário, era possível integrar a equação da linha elástica usando o método de Euler (desenvolvido pelo próprio, portanto, para obter a solução com grandes curvaturas).

Com o desenvolvimento de materiais e processos de produção avançados, o projecto de estruturas capazes de suportar grandes deslocamentos de deformação tem vindo a apresentar casos de investigação bem sucedidos. Normalmente, não é desejável da parte dos projectistas conceber sistemas mecânicos ou estruturas que possam apresentar grandes deformações pela razão de comprometerem a sua integridade ou de afectar seriamente o desempenho de mecanismos ou sistemas cinemáticos integrando o conjunto. As excepções encontram uma boa razão, a qual se associa principalmente à economia do peso quando este é um parâmetro crítico no desenvolvimento do projecto. Este é o exemplo de alguns subconjuntos ou componentes estruturais aplicados em aeronáutica, onde não havendo propriamente grandes deslocamentos, estes excedem os valores que usualmente são considerados como aceitáveis no projecto de estruturas em aplicação quase estática. As figuras 2.6 e 2.7 exemplificam o severo teste de flexão efectuado na asa de um "*Dreamliner*" Boeing 787, onde o deslocamento no extremo pode exceder 3m (acresce que, para o teste efectuado, a asa, maioritariamente construída com componentes em fibra de carbono, partiu violentamente, não sendo este o modo de colapso típico com materiais metálicos, mais dúcteis do que os componentes em carbono).



Figura 2.6: Teste de flexão estática nas asas do Boeing 787 onde se pode verificar a impressionante flexibilidade da estrutura (vista lateral)

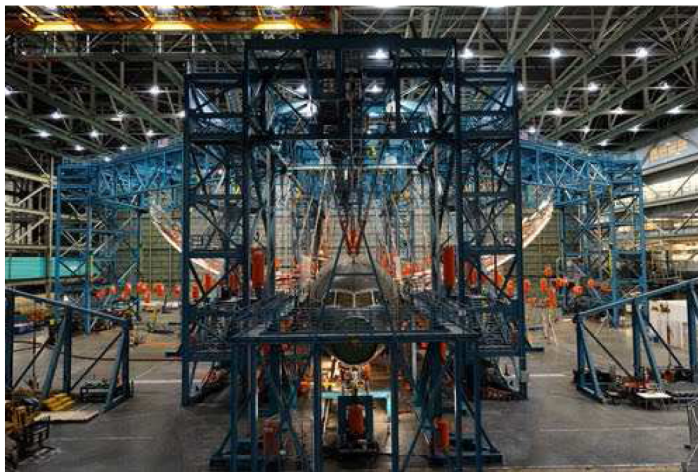


Figura 2.7: Teste de flexão estática nas asas do Boeing 787 onde se pode verificar a impressionante flexibilidade da estrutura (vista frontal)

Como referido, a capacidade de um conjunto estrutural em suportar grandes deslocamentos em flexão não significa um objectivo principal, mas sim o de proporcionar informação sobre o desempenho de materiais e ligações estruturais sob elevadas tensões e forças de solicitação. O desenvolvimento de materiais compósitos tem incluído na sua investigação o tipo de testes referido; por sua vez, o desenvolvimento de modelos numéricos proporciona que a simulação mencionada se possa efectuar de modo realista e rigoroso a custo bem mais reduzido do que o dos ensaios experimentais, normalmente bastante dispendiosos.

Nesta área, os contributos são muito numerosos, sendo pois citados aqui alguns exemplos de investigação que serviram de base a este trabalho.

Rao, mostra que em vigas de grande espessura ou rigidez, os efeitos de flexão e extensão da mesma não podem ser ignorados, uma vez que as deformações longitudinal e de curvatura (por flexão) aparecem com termos combinados como se verá adiante.[4]

Bathe e Bolourchi propuseram um elemento de viga de grandes deslocamentos para análise 3D com formulação Lagrangeana actualizada.[5]

Borri e Merlini efectuaram análises da deformação em regime de grandes deslocamentos em flexão em vigas de secção não homogénea, como é o caso do rotor de helicópteros (objectivo que levou estes autores ao estudo publicado). Neste trabalho havia a considerar a interacção de esforços de flexão, pela pressão de sustentação aerodinâmica e esforços axiais devidos à força centrífuga.[6]

Albanesi *et al* efectuaram simulação numérica de vigas em grandes deslocamentos por esforço de flexão 3D com o objectivo de otimizar um desenho estrutural por procedimentos inversos. Nesta metodologia, o modelo numérico era alterado até que o resultados correspondesse à configuração experimental dentro de padrões de tolerância prescritos.[17]

Rui P. Cardoso (tese de doutoramento, 2002) desenvolveu elementos de casca de integração reduzida onde incluiu técnicas de estabilização evitando modos de deformação espúrios (*hourglass*). Não tendo usado elementos de viga, o campo de deformações e as técnicas iterativas serviram de apoio ao presente trabalho.[12]

Como referido anteriormente, os conjuntos estruturais precisam de alguma flexibilidade dentro de padrões de segurança quanto ao estado de tensão. O caso dos esforços estáticos praticamente constitui uma situação particular de solicitações dinâmicas de muito baixa frequência. Com este conceito em mente, os investigadores analisaram a flexão de vigas em regime de grandes deslocamentos mas em situação de cargas dinâmicas, tornando mais abrangente as aplicações estruturais deste estudo.

O projecto estrutural pode ser realizado com recurso a métodos numéricos e experimentais, onde os últimos permitem a observação do comportamento real das estruturas carregadas. A modelação numérica é útil como um procedimento complementar de investigação, em que o comportamento da estrutura pode ser previsto com uma ferramenta de baixo custo. Neste campo, K. Kanaka Raju e G. Venkateswara Rao [13] aplicaram o método de modos de vibração assumidos satisfazendo as condições de fronteira geométricas com grande amplitude de vibração de vigas. JR Fonseca e P. Ribeiro formularam vigas de elementos finitos com técnicas de função hierárquica em vibrações geometricamente não-lineares.[15]

Um elevado número de publicações evidencia o interesse no projecto de materiais compósitos de alta desempenho para as varas de salto, quer no contexto da estrutura material quer na biomecânica do atleta. Morlier e Mesnard [16] apresentaram uma solução numérica baseada no método da rigidez actualizada da estrutura viga aplicada ao projecto de materiais compósitos para varas de salto. S. Wojciech e I. Adamiec-Wójcik [8] também realizaram experiências para validar uma abordagem da rigidez de elemen-

tos finitos baseada na análise de vibrações de grande amplitude de vigas viscoelásticas. Mecanismos de amortecimento para pequenos deslocamentos falham em vibrações de grande amplitude. M. Ghanbari JF e Dunne [10] apresentaram um modelo não-linear de amortecimento de vibrações de grande amplitude de vigas encastradas. Coeficientes da função de amortecimento são dependentes da amplitude e ajustados utilizando processos inversos a partir de procedimentos experimentais e otimização de algoritmos.

Extensómetros eléctricos são fiáveis e precisos na análise experimental de deformações, porém não são práticos para medições em tempo real no campo para a vara de salto. Técnicas *Wireless* superam as limitações, mas dispendiosas e vulneráveis a interferências externas. Alternativas concentram-se na gravação de vídeo de alta definição, permitindo a comparação da forma da estrutura com as soluções numéricas ou repetições experimentais em laboratório.

Técnicas de campo sem contacto são uma alternativa interessante para medidas discretas. Nesta matéria, BS Hockley usou a holografia laser com modulação de fase da viga de referência para visualizar as vibrações viga de grande amplitude.[3]

Parte II

Formulação não linear de elementos de viga

Capítulo 3

O elemento de Hermite

3.1 Considerações essenciais. O campo de deslocamentos

Nesta secção apresenta-se o método de formulação do elemento de dois nós de formulação *hermitiana cúbica*. Tais elementos são muito conhecidos e usados com grande frequência em problemas de análise estrutural. Estes elementos têm a grande vantagem de assegurar uma excelente continuidade da deformação pelo facto de ter os graus de liberdade em cada nó acoplados. Os graus de liberdade consistem no deslocamento transversal e a rotação da secção transversal. O modelo de deformação segue o de Euler-Bernoulli, em que a curvatura da viga é o principal parâmetro de caracterização do campo de deformações,

Sendo o elemento constituído por dois nós e em cada nó os graus de liberdade serem um deslocamento transversal e uma rotação, então as funções de forma a usar devem ser polinómios cúbicos, pois o grau do polinómio é dado por: *Nº de graus de liberdade* – 1, ou seja: $4 - 1 = 3$. As funções de forma hermitianas vêm referenciadas em inúmeros textos sobre Mecânica de Estruturas e Método de Elementos Finitos; no presente estudo seguiu-se Reddy [7]. A figura 3.1 mostra a geometria do elemento hermitiano e as respectivas funções de forma. No elemento representado, um ponto P não pertencente ao eixo baricêntrico da viga e referenciado pelas coordenadas (x, y) , passa depois da deformação a ter a posição dada por $P'(x+u, y+w)$, sendo u e w os deslocamentos segundo os eixos coordenados x e y , respectivamente.

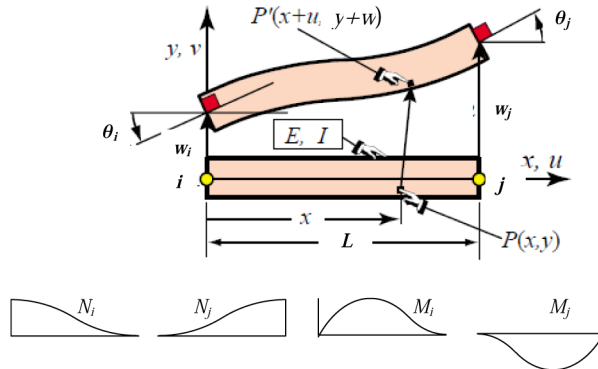


Figura 3.1: Representação do elemento de viga com deslocamentos por polinómios hermitianos cúbicos

O deslocamento transversal $w(x)$ é aproximado entre os nós extremos i e j a partir de funções de forma, tal como descrito:

$$w(\xi) = w_i N_{Hi} + \varphi_i N_{Mi} + w_j N_{Hj} + \varphi_j N_{Mj} = [N_{Hw}] \{\mathbf{w}_e\} \quad (3.1)$$

Sendo $w(\xi)$ o deslocamento transversal (isto é, normal ao eixo da viga) e $[N_{Hw}]$ é a matriz de funções de forma (polinómios hermitianos cúbicos); por sua vez, w_i , φ_i , w_j , φ_j são os graus de liberdade nos nós, respectivamente os deslocamentos transversais e as rotações das secções extremas. O deslocamento $w(\xi)$ é interpolado entre os nós extremos i e j por funções cúbicas hermitianas, como referido:

$$\begin{aligned} N_{Hi} &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & N_{Hj} &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_{Mi} &= L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & N_{Mj} &= L(-\xi^2 + \xi^3) \\ \xi &\in (0, \dots, 1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

A coordenada x relaciona-se com a coordenada adimensional ξ deste modo:

$$x = L\xi \quad (3.3)$$

sendo L o comprimento inter-nodal do elemento, começando a leitura no nó i .

3.2 O algoritmo matricial de solução

3.2.1 Problema Linear

Neste ponto vamos definir as deformações num elemento de Euler-Bernoulli sob flexão. O campo de deformações neste tipo de elementos de viga (admitindo que o campo de deslocamentos e deformações são suficientemente pequenos para poderem ser definidos por expressões diferenciais lineares, embora eventualmente de ordem superior a 1). As deformações resultam da combinação do efeito de esforços axiais e/ou de flexão, onde neste último caso, a *curvatura* da viga desempenha o principal papel. Num elemento de Euler-Bernoulli sob deformações pequenas, a deformação de um segmento elementar de comprimento dx caracteriza-se pela sua variação relativa de comprimento a partir do parâmetro k_x , a curvatura da viga. Esta exprime-se pela 2ª derivada do deslocamento transversal:

$$(\varepsilon_{xx})_{flex} = -zk_x = -z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.4)$$

Pela lei de Hooke aplicada à flexão de vigas, obtém-se:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad (3.5)$$

Sendo $M(x)$ o momento flector no elemento de viga, E o módulo de Young e I o momento de inércia de 3^a ordem em relação ao eixo principal de inércia que é normal ao plano de flexão. A razão do sinal negativo em (3.4) deve-se ao facto de convencionalmente as rotações nodais e o momento flector serem positivos no sentido indicado na figura 3.1, o que dá deformação negativa se o ponto na viga estiver acima do eixo neutro à distância z positivo. As deformações axiais podem também resultar da acção de esforços axiais, sendo tais deformações relacionadas com a tensão normal pela lei de Hooke:

$$(\varepsilon_{xx})_0 = \frac{du_0}{dx} = \frac{N_{x0}}{EA} \quad (3.6)$$

Sendo $(\varepsilon_{xx})_0$ a deformação axial devida ao deslocamento u_0 uniformes na secção transversal por efeito do esforço normal N_{x0} . Por sua vez, E e A são o módulo de Young e a área transversal do elemento (suposto de secção uniforme entre os nós extremos), respectivamente. Como referido, em problemas lineares as expressões (3.4) e (3.6) podem sobrepor-se, ou combinar com forças axiais de flexão.

O deslocamento u_0 formula-se de modo independente de w , tendo u_0 a seguinte interpretação por funções de forma:

$$u_0 = N_{0i}u_{0i} + N_{0j}u_{0j} \quad (3.7)$$

A matriz de funções de forma lineares (ou de ordem 0) e o vector de deslocamentos axiais nodais podem ser assim organizados:

$$[N_0] = [N_{0i} \quad N_{0j}] \quad (3.8)$$

$$\{\mathbf{u}_0\} = \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ u_{0j} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

sendo

$$\begin{aligned} N_{0i} &= 1 - \xi & N_{0j} &= \xi \\ \xi &= \frac{x}{L} & \xi &\in (0, ..1) \end{aligned}$$

A energia de deformação gerada pelo campo de deformações proveniente das equações (3.4) e (3.6) é:

$$U(\varepsilon) = \frac{EA}{2} \{\mathbf{u}_0\}^T \left\{ \int_0^L [N_0']^T [N_0'] dx \right\} \{\mathbf{u}_0\} + \frac{EI}{2} \{\mathbf{w}_e\}^T \left\{ \int_0^L [N_{Hw}'']^T [N_{Hw}''] dx \right\} \{\mathbf{w}_e\} \quad (3.10)$$

onde se distingue a componente devida a deformação axial (uniforme) e a da curvatura da viga por flexão. Estas formas de energia interna estão desacopladas em problemas

lineares e elásticos, verificando-se tal quando se procura o valor estacionário da energia de deformação (3.10) estabelecendo a seguinte condição necessária:

$$\begin{cases} \frac{\partial U(\varepsilon)}{\partial \mathbf{u}_0} = EA \left\{ \int_0^L [N'_0]^T [N'_0] dx \right\} \{\mathbf{u}_0\} - \{\mathbf{F}_u\} = 0 \\ \frac{\partial U(\varepsilon)}{\partial \mathbf{w}_e} = EI \left\{ \int_0^L [N''_{Hw}]^T [N''_{Hw}] dx \right\} \{\mathbf{w}_e\} - \{\mathbf{F}_w\} = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

(3.11) representa um sistema de equações algébricas lineares onde o 2º membro é composto por forças externas $\{\mathbf{F}_u\}$ (axiais) e $\{\mathbf{F}_w\}$ (transversais) aplicadas nos nós do elemento (ou associação de elementos como uma malha). O sistema (3.11) pode escrever-se na forma matricial como se segue:

$$[K]_H \{\mathbf{X}_e\} = \{\mathbf{R}_e\} \quad (3.12)$$

Onde $[K]_H; \{\mathbf{X}_e\}; \{\mathbf{R}_e\}$ representam respectivamente, a matriz de rigidez do elemento (ou associação de elementos) hermitianos; o vector de deslocamentos nodais (incógnitas do problema) e o vector das forças exteriores aplicadas aos nós da estrutura. O vector dos deslocamentos é assim composto:

$$\{\mathbf{X}_e\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{w}_e \\ \varphi_e \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Onde $\mathbf{u}_e; \mathbf{w}_e; \varphi_e$ são os deslocamentos nodais axiais, transversos e as rotações das secções transversais do elemento, tal como já mencionado na equação (3.1) deste capítulo.

Tendo efectuado os integrais em (3.11) e organizando-os de acordo com uma ordem estabelecida segundo a que foi assumida para o vector (3.13), obtém-se a matriz de rigidez do elemento de viga. A matriz de rigidez resultante é a seguinte:

$$[K]_H = E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{L^3} & \frac{6I}{L^2} & 0 & -\frac{12I}{L^3} & \frac{6I}{L^2} \\ 0 & \frac{6I}{L^2} & \frac{4I}{L} & 0 & -\frac{6I}{L^2} & \frac{2I}{L} \\ -\frac{A}{L} & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{L^3} & -\frac{6I}{L^2} & 0 & \frac{12I}{L^3} & -\frac{6I}{L^2} \\ 0 & \frac{6I}{L^2} & \frac{2I}{L} & 0 & -\frac{6I}{L^2} & \frac{4I}{L} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Onde E , A e I são respectivamente, o módulo de Young do material, a área e o momento de inércia segundo o eixo de flexão da secção transversal da viga. É importante

referir que a matriz de rigidez (3.14) está referida a um sistema de eixos locais, sendo os eixos locais x e y paralelo e normal ao eixo da viga, respectivamente. Para exprimir a matriz (3.14) no referencial global (tal pode ser necessário se o elemento de viga se encontrar inclinado), efectua-se a seguinte transformação matricial:

$$[K]_{H0} = [T]^T [K]_H [T] \quad (3.15)$$

onde a matriz de transformação é obtida da seguinte forma:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Na matriz de transformação da equação (3.16) α é o ângulo que o eixo local x da viga faz com o eixo x_0 do referencial geral ou global. Para terminar a definição da solução de problemas estruturais com este elemento de viga, define-se agora o vector das forças nodais exteriores $\{\mathbf{R}_e\}$, o qual pode resultar da acção de forças e momentos localizados ou de distribuição contínuas:

$$\{\mathbf{R}_e\} = \begin{Bmatrix} N_{0i} \\ V_{wi} \\ M_i \\ N_{0j} \\ V_{wj} \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Na equação (3.17) N_0 , V_w e M são respectivamente, o esforço axial, o esforço transversal e o momento concentrado, nos nós i e j . Havendo forças ou momentos resultando

de uma distribuição contínua, é necessário efectuar os integrais:

$$\begin{aligned} N_{0(iouj)} &= \int_0^L n_o(x) N_{0(iouj)} dx \\ V_{w(iouj)} &= \int_0^L v(x) N_{H(iouj)} dx \\ M_{(iouj)} &= \int_0^L m(x) N_{M(iouj)} dx \end{aligned} \quad (3.18)$$

Onde n_0 , v e m representam distribuições contínuas de força axial, transversal e momento flector. Este resultados são sobrepostos a forças ou momentos concentrados, como foi referido anteriormente.

3.2.2 Formulação não-linear geométrica, para o elemento de Hermite

Nesta etapa da formulação, considera-se que as deformações devidas à flexão geram um campo de deslocamentos suficientemente grande para que haja interacção com as deformações segundo o eixo da viga. Contudo, considera-se que o material continua a experimentar um comportamento elástico, recuperando o elemento as suas dimensões depois de cessar a acção do sistema de forças exteriores. Importa principalmente referir que, no caso de um deslocamento por flexão, o comprimento final da viga projectado sobre o seu eixo inicial já não tem a mesma grandeza, podendo pois influenciar a deformação axial uniforme, sendo este assunto retomado no capítulo seguinte a quando da formulação de um elemento de viga Timoshenko para grandes deslocamentos. Para relacionar diferencialmente estes deslocamentos, consideremos o elemento de viga na figura 3.2. Quando a viga apresentar uma inclinação devida à flexão, é necessário que a sua linha média se alongue de modo a que os nós extremos se conservem sobre as linhas paralelas ao eixo y , conforme está representado na figura 3.2. Esta deformação é normalmente desprezada em problemas lineares, mas se for desejado formular casos de varejamento e grandes deslocamentos em flexão, é necessário incluir esta deformação. Pela análise geométrica da figura 3.2, pode-se estabelecer que, sendo L_0 o comprimento inicial (entre os nós i_0 e j_0), o comprimento final da viga L_t (unindo i_t a j_t) é dado pela expressão:

$$L_t = \frac{L_0}{\cos \theta} \quad (3.19)$$

A deformação não linear real, segundo a direcção x associada a esta variação de comprimento é:

$$\varepsilon_{nlx} = \frac{L_0 / \cos \theta - L_0}{L_0 / \cos \theta} = 1 - \cos \theta \quad (3.20)$$

Desenvolvendo $\cos \theta$ em série de Taylor (sendo θ pequeno) fica:

$$\varepsilon_{nlx} = 1 - \cos \theta \simeq \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (3.21)$$

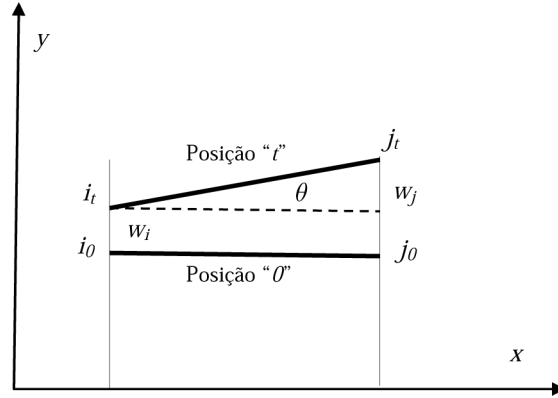


Figura 3.2: Elemento de viga; posição inicial e final

Esta expressão é sobreposta à deformação axial devida à acção de forças segundo o eixo da viga dando lugar à expressão completa para a deformação axial:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (3.22)$$

A presença de um termo diferencial quadrático torna o problema não linear, de modo que são necessárias técnicas específicas para a solução. No capítulo seguinte será pormenorizado este assunto, sendo de momento descrita a formulação semelhante à obtida a partir da estacionaridade da energia de deformação na equação (3.10). A energia de deformação gerada numa viga em que o campo de deformações envolve termos não lineares é:

$$U(\varepsilon) = \frac{EA}{2} \left\{ \int_0^L \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right)^2 dx \right\} + \frac{EI}{2} \left\{ \int_0^L \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx \right\} \quad (3.23)$$

Os deslocamentos $u(x)$ e $w(x)$ são interpolados entre os parâmetros nodais usando as expressões (3.1) e (3.7). De notar que neste elemento de viga (Euler-Bernoulli) a curvatura gera deformações longitudinais adicionais apenas em pontos não pertencentes ao eixo da viga (ou seja, mais precisamente, no plano de flexão da viga, onde as deformações axiais são nulas). A condição para o mínimo do funcional $U(\varepsilon)$ em (3.23) em relação a pequenas (mas arbitrárias) variações dos deslocamentos nos nós é assim obtida:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_u = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_e} = EA \left(\int_0^L (N'_u N'_u) dx \right) \mathbf{u}_e + EA \left(\int_0^L \left(\frac{1}{2} (N'_u) (N'_w)^2 \right) dx \right) \mathbf{w}_e^2 \\ \mathbf{F}_w = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{w}_e} = EA \left(\int_0^L (N'_u) (N'_w)^2 dx \right) \mathbf{w}_e \mathbf{u}_e + EA \left(\int_0^L \left(\frac{1}{2} (N'_w)^4 \right) dx \right) \mathbf{w}_e^3 + \\ EI \left(\int_0^L (N''_w N''_w) dx \right) \mathbf{w}_e \end{cases} \quad (3.24)$$

Obtemos um sistema de equações não lineares e não simétrico, o que obriga a usar soluções iterativas para o resolver. O vector das incógnitas contém inevitavelmente termos de segunda ordem e mais, não sendo possível escrevê-lo do modo convencional de um vector coluna. Um modo de permitir a solução iterativa do sistema (3.24) consiste em aproximar os termos de incógnitas com potências a um produto onde só o termo linear é efectivamente incógnita; por exemplo, onde aparece \mathbf{w}_e^2 (como incógnita) substitui-se por $(\mathbf{w}_e)_{actual} \times \mathbf{w}_e$ onde só \mathbf{w}_e é efectivamente incógnita enquanto $(\mathbf{w}_e)_{actual}$ não o é, sendo aqui conhecido de uma iteração anterior (no começo do processo até é nulo); da mesma maneira, com $\mathbf{w}_e \mathbf{u}_e$ passa a ser $(\mathbf{w}_e)_{actual} \mathbf{u}_e$ onde só $(\mathbf{w}_e)_{actual}$ é conhecido de iteração anterior; por fim, o termo \mathbf{w}_e^3 aproxima-se como $(\mathbf{w}_e)_{actual}^2 \times \mathbf{w}_e$ sendo só \mathbf{w}_e incógnita. O sistema assim formado começa por ser resolvido na primeira iteração fazendo nulos todos os termos assinalados como $(\dots)_{actual}$ se a viga estiver na sua posição natural recta (sem forças externas). Assim, na primeira iteração para a resolução do sistema (3.24) ter-se-á esta versão:

$$\begin{cases} EA \left(\int_0^L (N'_u N'_u) dx \right) \mathbf{u}_e + EA \times 0 = \mathbf{F}_u \\ EA \times 0 \times \mathbf{u}_e + EA \left(\int_0^L \left(\frac{1}{2} (N'_w)^4 \right) dx \right) \times 0 + EI \left(\int_0^L (N''_w N''_w) dx \right) \mathbf{w}_e = \mathbf{F}_w \end{cases} \quad (3.25)$$

Ou seja, o sistema reduz-se a este que está desacoplado nas incógnitas \mathbf{u}_e e \mathbf{w}_e :

$$\begin{cases} EA \left(\int_0^L (N'_u N'_u) dx \right) \mathbf{u}_e = \mathbf{F}_u \\ EI \left(\int_0^L (N''_w N''_w) dx \right) \mathbf{w}_e = \mathbf{F}_w \end{cases} \quad (3.26)$$

Este sistema consiste no clássico algoritmo para a resolução de problemas de vigas deformadas exclusivamente por deslocamentos transversais por cargas da mesma orientação; os deslocamentos agora obtidos são então substituídos no sistema (3.24) mas de acordo a aproximação referida acima, que permite linearizar o sistema e partir para o segundo incremento de carga com o objectivo de obter novo incremento no vector de incógnitas.

Este sistema de equações (3.24) é não simétrico, o que leva a algumas dificuldades com programas de computador disponíveis e aptos para a solução de sistemas algébricos com matrizes simétricas.

Uma eficiente técnica de linearização do sistema (3.24) consiste em obter a matriz tangente em cada iteração. Tal é conseguido a partir da definição dos termos da matriz de rigidez. Por exemplo, considerando a força axial \mathbf{F}_u na equação (3.24), obtida pela derivação parcial do funcional U em ordem ao vector de deslocamentos nodais \mathbf{u}_e , esta força representa uma equação do sistema que permite obter o vector de deslocamentos em cada incremento das forças externas. Tal equação é uma combinação de incógnitas (eventualmente em ordem superior a 1) e factores k_{ij} que são os termos da matriz de

rigidez. A obtenção de tais factores é obtida em cada configuração da estrutura no tempo (ou seja, a deformação incremental) deste modo:

$$k_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \quad (3.27)$$

Sendo u_j o deslocamento de ordem j do vector de deslocamentos completo.

Aplicando esta técnica, ter-se-á a matriz de rigidez tangente para o elemento hermitiano formulado:

$$[K]_{nl}^{tgt} = \begin{bmatrix} EA \left(\int_0^L (N'_u N'_u) dx \right) & EA \left(\int_0^L ((N'_u) (N'_w)^2) dx \right) \mathbf{w}_e \\ EA \left(\int_0^L (N'_u) (N'_w)^2 dx \right) \mathbf{w}_e & EA \left(\int_0^L \left(\frac{3}{2} (N'_u) (N'_w)^4 \right) dx \right) \mathbf{w}_e^2 + \\ & EI \int_0^L (N''_w N''_w) dx \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Tendo os factores \mathbf{w}_e e \mathbf{w}_e^2 o significado já explicado anteriormente.

Importa referir que, a fim de possibilitar a formação de um sistema de equações lineares, os termos \mathbf{w}_e^2 que aparecem, não são incógnitas, mas sim valores conhecidos de iteração anterior (no fase se "arranque" do processo iterativo, estes termos podem até ser nulos). Como se verifica, esta matriz é simétrica e de ordem inferior à da matriz de rigidez apresentada no sistema (3.25). Consideremos a equação de resolução da configuração da estrutura sob acção de um sistema de forças. Se este sistema for incrementalmente aplicado, então a configuração da estrutura é assim actualizada:

$$\begin{aligned} [K]_{nl}^{tgt} \Delta \{\mathbf{u}_e\} &= \Delta \{\mathbf{F}_e\} \\ \{\mathbf{u}_e\}_{t+\Delta t} &= \{\mathbf{u}_e\}_t + \Delta \{\mathbf{u}_e\} \\ [\mathbf{F}]_{t+\Delta t}^{tgt} &= \{\mathbf{F}\}_t + \Delta \{\mathbf{F}_e\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

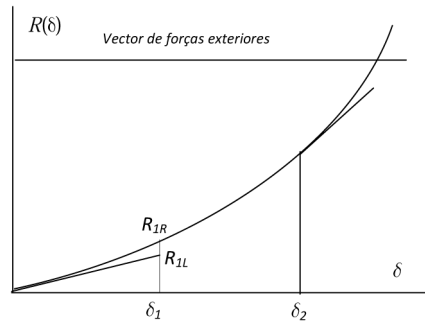
O valor anteriormente obtido para o vector de forças internas $\{\mathbf{F}\}_{t+\Delta t}^{tgt} = \{\mathbf{F}\}_t + \Delta \{\mathbf{F}_e\}$ não coincide necessariamente com o que se obtém a partir da matriz não linear da equação (3.25):

$$\{\mathbf{R}_s\}_{t+\Delta t} = \left| \{\mathbf{F}\}_{t+\Delta t}^{Real} - \{\mathbf{F}\}_{t+\Delta t}^{tgt} = [K]_{nl} \{\mathbf{u}_e\}_{t+\Delta t} - \left(\{F\}_t + [K]_{tgt} \Delta \{\mathbf{u}_e\} \right) \right| \quad (3.30)$$

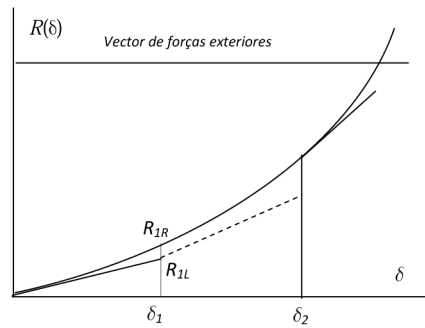
Este vector serve de acelerador da solução para o resultado final, uma vez que o vector de forças actual ao fim de cada iteração $\{F\}_{t+\Delta t}^{lin} = \{F\}_t + [K]_{tgt} \Delta \{\mathbf{u}_e\}$ passa a ser tomado como

$$\{F\}_{t+\Delta t}^{Real} = [K]_{nl} \{\mathbf{u}_e\}_{t+\Delta t} \quad (3.31)$$

Graficamente, este processo pode explicar-se nas figuras 3.3 e 3.4

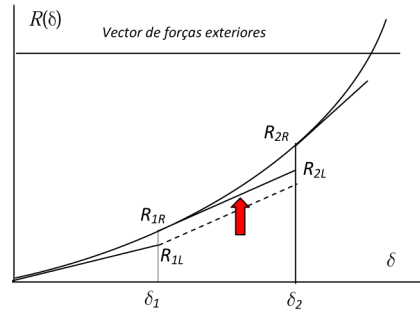


(a) Iteração nº1

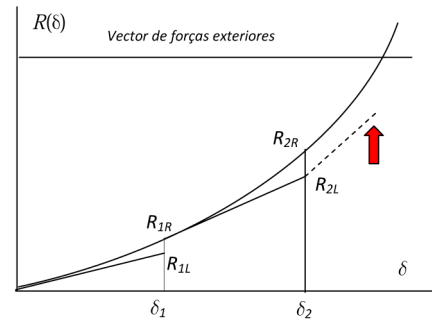


(b) Obtenção da nova matriz tangente

Figura 3.3: Exemplo gráfico de iteração pelo método de Newton-Raphson (matrix tangente)



(a) Renomeação do vector de forças internas; Iteração n°2



(b) Iteração n°3

Figura 3.4: Exemplo gráfico de iteração pelo método de Newton-Raphson (matrix tangente), (cont.)

3.2.3 A solução iterativa; linearização da matriz do sistema de equações

A solução de um sistema de equações não lineares não é tarefa simples, sendo a principal dificuldade imputável ao arranque do processo iterativo a partir de um vector inicial de incógnitas garantindo a convergência para a solução correcta. Métodos disponíveis são por exemplo o de Gauss-Seidel ou o de Picard (referidos por Reddy [7]). No caso de Mecânica das Estruturas, a solução aproximada inicial permite que o processo seja estável e convergente, uma vez que no primeiro incremento de forças (ou deslocamentos), o cálculo da matriz de rigidez de arranque do processo se baseia na energia total estacionária, um princípio fisicamente verificado.

Quando uma viga se deforma em regime de grandes deslocamentos, contudo sempre mantendo o material em regime elástico, a rigidez estrutural da viga aumenta. Com efeito, se consideramos o caso simples da viga encastrada e no extremo livre submetida a uma força concentrada transversal (isto é, normal ao eixo da viga), à medida que a curvatura da viga aumenta pela flexão, o ângulo que a força aplicada no extremo livre deixa de ser 90° , havendo lugar a redução da componente perpendicular ao eixo actual da viga e aumento da componente coincidente com o referido eixo. Num gráfico simples, a evolução da relação força-deslocamento (no extremo livre) é muito semelhante ao que está apresentada na figura 3.5.

Sendo não linear a evolução da reacção interna da viga face a um campo de deslo-

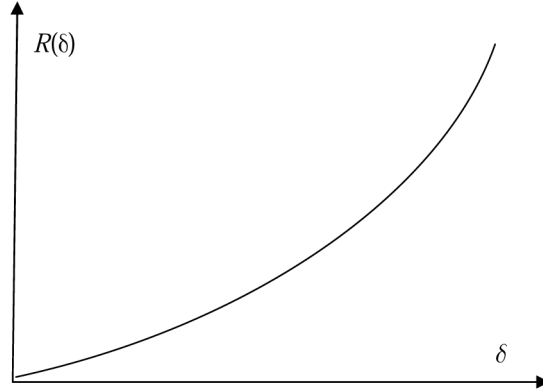


Figura 3.5: Evolução aproximada da relação força-deslocamento no extremo livre de uma viga encastrada

camentos prescrito, a aproximação à tendência $R = R(\delta)$ na figura 3.5 é efectuada por incrementos de deslocamentos, assumindo que entre cada incremento, a matriz de rigidez do elemento (ou associação de elementos) se mantém constante (isto é, o problema está linearizado durante cada incremento para a solução). Passado cada incremento, o vector de forças de reacção interna é calculado e comparado com o que efectivamente se deveria verificar, calculando-se o resíduo no processo incremental. Esta fase do método serve para avaliar a qualidade da aproximação e repensar a amplitude dos incrementos, refinando-os eventualmente, sendo este procedimento descrito com pormenor mais adiante durante um exemplo. De momento, consideremos a energia interna gerada no elemento de viga deformado em regime não linear e o vector de forças externas calculado a partir do Teorema de Castigliano [1], o qual estabelece que:

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = F_{u_i}$$

Este teorema estabelece que uma variação da energia de deformação em ordem à componente u_i do vector de deslocamentos \mathbf{U} é igual à componente F_{u_i} do vector de forças \mathbf{F} que provocou aquela componente do deslocamento.

Aplicando este teorema ao problema em discussão vamos ter o sistema de equações que permite resolver a estrutura.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_{Tot}}{\partial \mathbf{u}_e} = EA \int_0^L \left(N_u'^T N_u' \mathbf{u}_e - \frac{1}{2} N_u'^T (N_w' \mathbf{w}_e)^2 \right) dx = \mathbf{F}_{u_e} \\ \frac{\partial U_{Tot}}{\partial \mathbf{w}_e} = EA \int_0^L \left(- \left((N_w'^2)^T N_u' \right) \mathbf{w}_e \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} (N_w'^T N_w')^T (N_w') (\mathbf{w}_e)^2 \mathbf{w}_e \right) dx + \\ \quad GAk \int_0^L \left(N_w'^T N_w' \mathbf{w}_e - N_w'^T N_\beta \beta_e \right) dx = \mathbf{F}_{w_e} \\ \frac{\partial U_{Tot}}{\partial \beta_e} = GAk \int_0^L \left(-N_\beta^T N_w' \mathbf{w}_e + N_\beta^T N_\beta \beta_e \right) dx + EI \int_0^L \left(\frac{\partial (N_\beta \beta_e)}{\partial x} \right) dx = \mathbf{M}_{\beta_e} \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Este resultado, passado cada incremento de deslocamento é comparado com o correspondente obtido pela técnica de linearização a seguir descrita:

- a) No arranque do processo, o sistema (3.32) contém um conjunto de equações nas incógnitas \mathbf{u}_e , \mathbf{w}_e e $\boldsymbol{\beta}_e$, que são deslocamentos e rotações nos nós. Em notação abreviada, cada equação do sistema (3.32) pode ser assim escrita:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 + \dots \\ F_2 = k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3 + \dots \\ \dots\dots\dots \\ F_j = k_{j1}x_1 + k_{j2}x_2 + k_{j3}x_3 + \dots \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Ou em notação de Einstein:

$$F_i = k_{ij}x_j \quad (3.34)$$

Onde F_i são as forças (ou momentos) externos actuando nos nós dos elementos (eventualmente agrupados numa estrutura mais complexa) e x_j são as incógnitas.

- b) Por observação das equações (3.33) ou (3.34) verifica-se que os factores k_{ij} que constituem os coeficientes da matriz de rigidez da estrutura, são obtidos pelas derivação parcial:

$$k_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad (3.35)$$

Estes factores integram a matriz de rigidez tangente, pelo facto de serem obtidos por derivação parcial, a qual graficamente corresponde ao declive da relação constitutiva na figura 3.5 para cada instante $\delta = \delta(t)$.

Como foi referido acima, no caso de soluções lineares estes factores são constantes durante todo o processo iterativo, o que dispensa a necessidade de se efectuar a resolução do problema de modo incremental. No entanto, em problemas não lineares, é corrente obter expressões em (3.35) dependentes dos deslocamentos x_j (que são afinal incógnitas do problema e em potências acima de 1). Deste modo, lineariza-se a solução do problema a partir deste procedimento:

Substituir no "arranque" do processo, em todos os factores (3.35), os deslocamentos correspondentes à configuração inicial da estrutura (ou seja, os deslocamentos nos nós enquanto não se prescreveu deslocamento algum). Tal execução permitirá obter factores

k_{ij} assumidamente constantes durante o primeiro incremento. Basicamente, cumpre-se esta equação iterativa para a estrutura resultando do agrupamento (*assembling*) de todos os elementos da malha:

$$\{\mathbf{R}\}_{t+\Delta t} = \{\mathbf{R}\}_t + \{\Delta\mathbf{R}\} = \{\mathbf{R}\}_t + [K_{tang}]_t \{\Delta\mathbf{X}\} \quad (3.36)$$

Onde $\{\mathbf{R}\}_t$ representa o vector de reacções internas (pode corresponder às tensões internas) no instante t (reacções "*correntes*") e $\{\mathbf{R}\}_{t+\Delta t}$ representa o mesmo vector mas actualizado depois do instante Δt (incrementado por $\{\Delta\mathbf{R}\} = [K_{tang}]_t \{\Delta\mathbf{X}\}$). O resultado assim obtido representa a aproximação linearizada à evolução do vector de reacções internas da estrutura (como um agrupamento de elementos). Este vector não coincide com o valor real, o qual é obtido a partir das equações (3.32) que esquematicamente decorre deste modo:

- Com uma matriz de rigidez ("actual") resolve-se o produto matricial $[K_{tang}]_t \{\Delta\mathbf{X}\} = \{\Delta\mathbf{R}\}$ (a matriz de rigidez é "tangente" e definida a partir de um vector de deslocamentos inicial, o qual pode ser nulo); soma-se este vector incremental ao vector dos deslocamentos iniciais, obtendo-se o vector de reacções internas: $\{\mathbf{R}\}_{t+\Delta t}^L = \{\mathbf{R}\}_t + [K_{tang}]_t \{\Delta\mathbf{X}\}$
- Este valor resulta de um cálculo linearizado, em que a matriz $[K_{tang}]_t$ aparece com coeficientes constantes no intervalo $\{\Delta\mathbf{X}\}$ e o valor efectivo do vector de reacções internas é $\{\mathbf{R}\}_{t+\Delta t}^R = (\int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [B]^T [D] [B] dx dz) \{\mathbf{X}\}_{t+\Delta t}$
- Sendo este o valor efectivo, ele deve substituir o $\{\mathbf{R}\}_{t+\Delta t}^L$ obtido com a linearização da matriz de rigidez e uma nova matriz tangente é obtida depois de se substituir o vector de deslocamentos actualizado, dando lugar a novo incremento $\{\mathbf{R}\}_{t+2\Delta t}^L = \{\mathbf{R}\}_{t+\Delta t} + [K_{tang}]_{t+\Delta t} \{\Delta\mathbf{X}\}$, prosseguindo o método iterativo. Acresce referir que a diferença $|\{\mathbf{R}\}_{t+\Delta t}^R - \{\mathbf{R}\}_{t+2\Delta t}^L|$ é um valor residual que serve para avaliar a precisão do processo iterativo; ele pode ser reduzido se a aproximação ao valor final do vector de forças exteriores não se encontrar dentro da tolerância estabelecida, sendo necessário para este objectivo, reduzir o incremento de deslocamentos e consequentemente, aumentar o número de iterações.

Este processo iterativo está graficamente esquematizado na figura 3.6

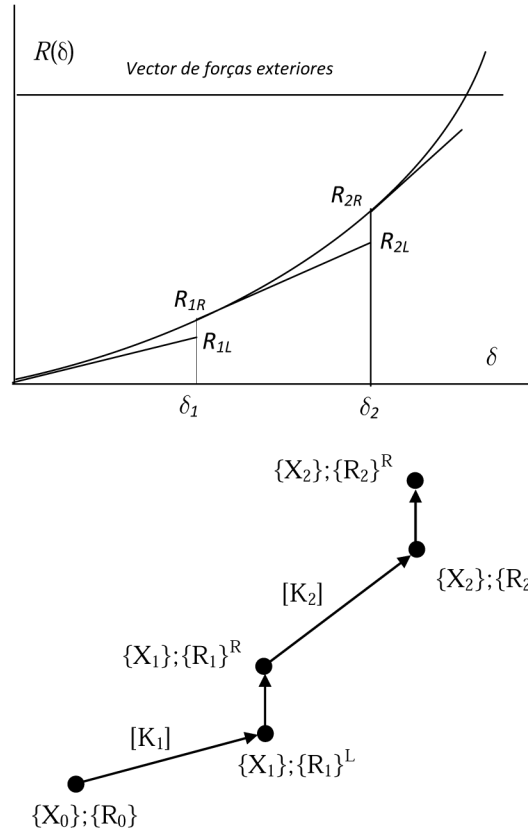


Figura 3.6: Esquema de iteração de Newton-Raphson numa estrutura com rigidez crescente

3.3 Síntese da formulação do elemento

O elemento que foi formulado deve naturalmente ser projectado no referencial inicial (ou referencial-base), tal como em (3.15), utilizando a matriz de transformação (3.16). A matriz de rigidez tangente, sendo gerada a partir de funções de forma cúbicas, representa um esforço computacional considerável se for efectuada integração numérica, dado que aparecem termos polinomiais que chegam a atingir grau 6, o que impõe um elevado número de pontos de gauss e consequentemente, o referido esforço computacional num programa de cálculo automático. Como alternativa (igualmente trabalhosa) surge o uso de técnicas analíticas na resolução dos integrais, mas tal representa também alguma complicação na programação de longas expressões. Neste trabalho não foi prosseguida a programação do elemento com matriz tal como apresentada em (3.28); em vez disto, foi simplesmente usada em cada iteração a forma linear (3.14) introduzida em (3.15) com a matriz de transformação. Esta versão mais simplificada deu bons resultados quanto à deformada devida a esforços transversais, mas não era previsivelmente rigorosa para esforços axiais combinados com transversos, uma vez que os termos de (3.15) não têm qualquer acoplamento de esforços axiais com transversais, tal como se especifica na deformação (3.22). No capítulo a seguir apresenta-se em pormenor a formulação de um elemento alternativo ao que agora se discutiu para deformação não linear geométrica devida à combinação de

esforços axiais e transversos, tal como tem vindo a ser discutido. Este elemento segue o modelo de Timoshenko-Mindlin, tendo uma matriz de rigidez de grau polinomial bem inferior à (3.28) como se poderá verificar a seguir, uma característica que o torna bem mais atractivo em programação para cálculo automático.

Capítulo 4

O elemento de Timoshenko

4.1 Considerações essenciais. O campo de deslocamentos

Nesta secção apresenta-se o método de formulação do elemento de dois nós para flexão em regime de grandes deslocamentos. O campo de deformações é contudo baseado em expressões para valores moderados, sendo o campo de deslocamentos obtido por algoritmo incremental baseado em técnicas de linearização da matriz de rigidez como se descreve adiante. O elemento a desenvolver tem uma geometria simples, consistindo num segmento de recta unindo dois nós como mostra a figura 4.1. Neste elemento, os deslocamentos caracterizando o estado de deformação, são três, respectivamente u (direcção axial), w (direcção transversal) e β , a rotação da secção transversal em relação ao eixo da viga original. Estes três deslocamentos estão associados a um pequeno elemento localizado na viga entre os nós extremos e podem ser interpolados a partir de funções de forma e os valores dos mesmos deslocamentos mas associados aos nós.

Este elemento terá os deslocamentos transversais e axiais formulados de modo independente das rotações verificadas nas secções transversais da viga, sendo assim prevista na viga a geração de distorções por corte transversal tal como descrito adiante. O elemento de viga assim formulado é conhecido como elemento de viga S. Timoshenko (*Stephen Timoshenko, Stanford University*), por ter sido este investigador que contribuiu para o seu desenvolvimento, embora autores como Mindlin (*Raymond Mindlin, Columbia State University*) e Reissner (*Eric Reissner, MIT, Cambridge, Mass.*) tenham melhorado e ampliado as potencialidades dos elementos de viga com ligação ao desenvolvimento de modelos de placas e cascas onde a deformação da secção transversal por corte não é desprezada.

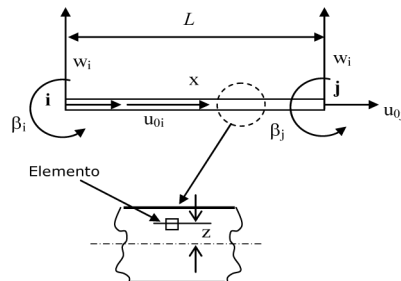


Figura 4.1: Elemento de viga Timoshenko com dois nós

Neste elemento de viga, o campo de deslocamentos $\{u, w, \beta\}$, tal como identificado acima, é obtido por interpolação entre os nós extremos i e j usando funções polinomiais para este efeito:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= N_i u_{0i} + N_j u_{0j} \\ w(x) &= N_i w_i + N_j w_j \\ \beta(x) &= N_i \beta_i + N_j \beta_j \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde x é a coordenada ao longo do eixo da viga de comprimento L (origem para x no nó i), u_{0i} , w_i , β_i e u_{0j} , w_j , β_j são respectivamente os deslocamentos axiais, transversais e a rotação das secções em cada nó da viga tal como na figura 4.1.

Em notação abreviada, as equações 4.1 podem ser assim escritas:

$$u_0 = [N_u]^T \mathbf{u}_e; w = [N_w]^T \mathbf{w}_e; \beta = [N_\beta]^T \boldsymbol{\beta}_e \quad (4.2)$$

onde

$$[N_u]^T = [N_w] = [N_\beta]^T = \{N_i \ N_j\} \quad (4.3)$$

onde $N_i = 1 - \frac{x}{L}$; $N_j = \frac{x}{L}$; sendo os deslocamentos e rotações nos nós:

$$\mathbf{u}_e = \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ u_{0j} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{w}_e = \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\beta}_e = \begin{Bmatrix} \beta_i \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

4.2 Formulação do campo de deformações

4.2.1 Pequenas deformações (modelo linear)

Na formulação linear de elementos de viga, as deformações envolvem apenas termos diferenciais lineares. No caso do elemento de viga Timoshenko, há apenas diferenciais de primeira ordem, sendo as duas deformações necessárias para este efeito assim definidas:

ε_{xx} a deformação axial (ou longitudinal) e γ_{xz} , a deformação de corte transversal [14]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \beta \end{aligned} \quad (4.5)$$

O deslocamento axial u de um ponto à distância z do plano neutro (tal como na figura 4.1) pode resultar de uma deformação axial uniforme combinada com a flexão, tal como dado pela primeira das equações (4.5). Numa formulação envolvendo pequenos deslocamentos, u e w (axial e transversal) não interagem em flexão.

4.2.2 Deformações moderadas (modelo não linear geométrico)

Quando na flexão de uma viga se verificam deslocamentos transversais grandes, há uma ligação geométrica diferencial entre os dois deslocamentos mencionados, como explicado na figura 4.2:

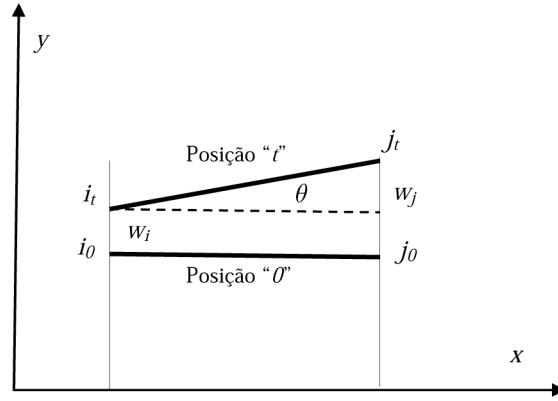


Figura 4.2: Elemento de viga; posição inicial e final

No elemento de viga representado na figura 4.2, este tem um deslocamento transversal que para continuar em contacto com os dois segmentos de recta verticais passando nos nós i e j (posição "0" e "t") deve permitir uma deformação axial, tal como descrito no capítulo anterior. Admitindo que o comprimento no instante inicial (posição "0") é L_0 e no instante final (posição "t") é L_t , então sendo θ o ângulo entre a posição final do elemento de viga e a horizontal, temos:

$$L_0 = L_t \cos \theta \quad (4.6)$$

A deformação axial associada à extensão devida à inclinação do elemento para se manter em contacto com as linhas verticais passando por i e j é dada por:

$$\varepsilon_x^t = \frac{L_t - L_0}{L_t} = \frac{L_t(1 - \cos \theta)}{L_0} \simeq 1 - \cos \theta \quad (4.7)$$

nesta fracção tomando $L_0 \simeq L_t$ simplifica-se obtendo $1 - \cos \theta$.

O valor inicial do ângulo θ é zero, pelo que em 4.7 se pode desenvolver o termo $\cos \theta$ em série de Taylor para $\theta = 0$:

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} (\cos \theta)_{\theta \rightarrow 0} + \dots = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (4.8)$$

onde $\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$. Passando esta expressão (4.8) para (4.7) e sobrepondo-a à primeira equação de (4.5), obtemos a expressão completa para as duas deformações a considerar numa

viga em regime de grandes deslocamentos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \beta\end{aligned}\tag{4.9}$$

Verifica-se que em flexão há interacção entre as deformações axiais e a inclinação da viga por flexão, como fisicamente é expectável. Entretanto, o termo devido à rotação da secção transversal da viga por efeitos de flexão continua a ser uma expressão de razoável exactidão em análise não linear (deslocamentos grandes, mas deformações moderadas; segundo Reddy [7] .

4.3 A matriz de rigidez: Formulação pela variação da energia de deformação

4.3.1 Solução Linear Elástica

Na obtenção de elementos de viga para aplicações em Mecânica de Estruturas em que os algoritmos são susceptíveis de implementação em programas de computador, a forma matricial é de primeira importância. A formulação do problema passa pela determinação da energia total armazenada no elemento de viga quando este se encontra deformado por acção de um sistema de forças. A energia de deformação depende naturalmente do tipo de deformação a que o elemento estrutural foi sujeito; quer dizer que havendo deformação axial uniforme, deformação por flexão e deformação devida ao corte transversal, vamos ter as correspondentes parcelas da energia de deformação associadas a cada modo de distorção. Assim, para o caso geral agora resumido, a energia total é obtida pela soma das parcelas:

$$U_{Tot} = U_i + U_{Ext}\tag{4.10}$$

Onde U_i representa a parcela devida à energia interna (de deformação) e U_{Ext} é o trabalho realizado pelas forças exteriores ao deformar o sólido desde o instante inicial até à configuração final. A parcela da energia interna é assim definida:

$$U_i = U_\varepsilon + U_\beta + U_\gamma\tag{4.11}$$

Na equação (4.11), U_ε refere-se à energia para uma extensão uniforme ε_0 ; $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x}$; U_β resulta da flexão da viga (deformação $(\varepsilon_{xx})_\beta = -z \frac{\partial \beta}{\partial x}$) e U_γ resulta da deformação de corte transversal $\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \beta$. Cada uma das três parcelas da energia interna é dependente de parâmetros desconhecidos, os quais são os deslocamentos nos nós do elemento. Se estes parâmetros estiverem associados à solução exacta para o campo de deslocamentos que permite igualmente obter o campo de deformações efectivamente resultante de um sistema de forças exterior à estrutura, então a energia total $U_{Tot} = U_i = U_{Ext}$, deve ser zero,

porque a energia interna deve estar em equilíbrio com o trabalho realizado pelo sistema de forças externas. Contudo, na formulação deste elemento, foram usadas funções de forma interpolando o campo de deslocamentos entre os nós, o que constitui uma aproximação à solução exacta. Assim, a energia total $U_{Tot} = U_i + U_{Ext}$ não é nula, mas tem um valor residual. Variações nos parâmetros nodais induzem uma consequente variação na energia total do sistema estrutural; porém, é possível que na vizinhança de determinados valores, pequenas variações nos referidos parâmetros desconhecidos praticamente não provoquem variação significativa na energia total; dizemos que nestas circunstâncias se atingiu a solução do problema porque a energia total se apresenta estacionária. Matematicamente, esta condição é necessária (embora não suficiente) e exprime-se pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{Tot}}{\partial \mathbf{u}_e} = 0 \\ \frac{\partial U_{Tot}}{\partial \mathbf{w}_e} = 0 \\ \frac{\partial U_{Tot}}{\partial \boldsymbol{\beta}_e} = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Onde:

$$\begin{cases} \{\mathbf{u}_e\}^T = \{u_i \ u_j\} \\ \{\mathbf{w}_e\}^T = \{w_i \ w_j\} \\ \{\boldsymbol{\beta}_e\}^T = \{\beta_i \ \beta_j\} \end{cases} \quad (4.13)$$

sendo i e j os índices dos nós extremos do elemento (figura 4.1). Numa solicitação em que se verificam deformações elásticas, as parcelas da energia interna são correspondentes ao trabalho de deformação que as tensões internas realizam sobre as correspondentes deformações, apresentando-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon_0} &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_x\}_0^T \{\varepsilon_x\}_0 dx dz \\ U_{\beta} &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_x\}_{\beta}^T \{\varepsilon_x\}_{\beta} dx dz \\ U_{\gamma} &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\tau_{xz}\}^T \{\gamma_{xz}\} dx dz \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde h é a dimensão da secção transversal segundo a direcção normal ao eixo da viga (no caso de uma secção rectangular uniforme, h é a espessura da viga). Os termos em (4.14) referem-se a parcelas da energia de deformação por esforço axial uniforme, U_{ε_0} , por flexão

U_β e por corte transversal U_γ . Numa deformação linear elástica, a lei de Hooke permite expressões alternativas a (4.14) como estas:

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon_0} &= \frac{EA}{2} \int_0^L \{\varepsilon_x\}_0^T \{\varepsilon_x\}_0 dx \\ U_\beta &= \frac{EI}{2} \int_0^L \{\varepsilon_x\}_\beta^T \{\varepsilon_x\}_\beta dx \\ U_\gamma &= \frac{GAk}{2} \int_0^L \{\gamma_{xz}\}^T \{\gamma_{xz}\} dx \end{aligned} \quad (4.15)$$

O termo k é um parâmetro corrector da energia de deformação por corte transversal tendo em conta a distorção da secção transversal por empeno devido às tensões de corte. No caso de uma secção rectangular (caso analisado com frequência), $k = \frac{5}{6}$.

Numa notação abreviada, a energia interna obtém-se da expressão integral

$$U_i = \{\delta_e\}^T \left(\int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [B]^T [D] [B] dx dz \right) \{\delta_e\} \quad (4.16)$$

onde $\{\delta_e\}$ é o vector dos deslocamentos nos nós, contendo os termos nodais expressos na equação(4.4). A matriz $[B]$ em (4.16) é um operador que permite obter as deformações a partir das funções de forma e derivadas do seguinte modo:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}}_{[B]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{N_u\}^T & 0 & 0 \\ 0 & \{N_w\}^T & 0 \\ 0 & 0 & \{N_\beta\}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_e\} \\ \{\mathbf{w}_e\} \\ \{\beta_e\} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial N_u}{\partial x} \right\}^T & 0 & \left\{ -z \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right\}^T \\ 0 & \left\{ \frac{\partial N_w}{\partial x} \right\}^T & -\{N_\beta\}^T \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Por sua vez, a matriz $[D]$ contém as constantes que definem a relação constitutiva do material, isto é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = Eh \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

onde E , ν , e h , são respectivamente, o módulo de Young, o coeficiente de Poisson do material e a espessura e σ_{xx} e τ_{xz} são as tensões normais e de corte transversal.

Consideremos agora a prescrição da condição do funcional estacionário para a energia total U_{Tot} tal como em (4.12). Nestas circunstâncias, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(U_i + U_{ext})}{\partial \mathbf{u}_e} = 0 \\ \frac{\partial(U_i + U_{ext})}{\partial \mathbf{w}_e} = 0 \\ \frac{\partial(U_i + U_{ext})}{\partial \beta_e} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{u}_e} = -\frac{\partial U_{ext}}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{F}_{\mathbf{u}_e} \\ \frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{w}_e} = -\frac{\partial U_{ext}}{\partial \mathbf{w}_e} = \mathbf{F}_{\mathbf{w}_e} \\ \frac{\partial U_i}{\partial \beta_e} = -\frac{\partial U_{ext}}{\partial \beta_e} = \mathbf{M}_{\beta_e} \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

Estas equações são o resultado da aplicação do Teorema de Castigliano, o qual se enuncia como *"a derivada da energia de deformação num sólido sob acção de um sistema de forças, em ordem a determinado deslocamento previsto no processo de deformação δ_i , é igual à força que está aplicada no ponto que precisamente se desloca δ_i "*. Portanto, ao derivar parcialmente a energia de deformação interna em ordem aos deslocamentos desconhecidos $\{\mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e, \beta_e\}$, estamos a obter as equações de solução de uma estrutura sob condições de fronteira e forças externas que são especificadas a partir do teorema de Castigliano (em (4.20)).[1]

Na solução linear elástica (onde as deformações são de primeira ordem e sem coeficientes quadráticos), as derivadas em (4.20) permitem obter um sistema de equações lineares de coeficientes constantes. A matriz do sistema é simétrica e a resolução faz-se de uma só vez; quer dizer que não é necessário um algoritmo incremental. Já o caso de deformações não lineares não pode ser analisado com as técnicas descritas até agora, uma vez que o sistema (4.20) tem termos incógnita na própria matriz e com potências quadráticas. Para resolver este sistema será utilizado o método iterativo de Newton-Raphson descrito no ponto a seguir.

4.3.2 Deformações não lineares: solução não linear geométrica (vigas elásticas)

Descrição do Problema

Neste caso, a deformação da viga é assumida como resultante de grandes deslocamentos; contudo o material não é submetido a um estado de tensão além do limite elástico (aqui considerado como referenciado pela tensão normal comparada com o limite elástico em esforço axial simples). Tratando-se do problema da flexão de uma viga homogênea e de secção uniforme tal como exemplificado na figura 4.1, as deformações a usar na formulação são referentes às expressões (4.9), ou seja:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \beta$$

Seguindo os mesmos procedimentos na obtenção dos termos da energia de deformação (equações (4.11) - (4.15)), estes têm agora as seguintes componentes:

- A energia de deformação por esforço axial:

$$U_e = \frac{1}{2}EA \int_0^L \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 dx \quad (4.21)$$

- A energia de deformação por flexão:

$$U_\beta = \frac{1}{2}EI \int_0^L \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.22)$$

- A energia de deformação por corte transversal:

$$U_\gamma = \frac{1}{2}GAk \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \beta \right)^2 dx \quad (4.23)$$

De novo, procura-se a partir da energia total envolvida no sistema que consiste na viga deformada sob acção de um sistema de forças externas, chegar à condição de valor estacionário para tal energia, sendo para isto, a condição necessária expressa pelo sistema de equações como (4.20). Contudo, ao efectuar as derivadas incluídas em (4.20), não vamos obter, como foi referido, uma matriz de coeficientes constantes nem simétrica, atributos que impossibilitam uma solução baseada em técnicas algébricas simples. A energia total no sistema estrutural tem esta expressão:

$$U_{Tot} = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial(N_u \mathbf{u}_e)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(N_w \mathbf{w}_e)}{\partial x} \right)^2 \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial(N_\beta \beta_e)}{\partial x} \right)^2 + \frac{GAk}{2} \left(\frac{\partial(N_w \mathbf{w}_e)}{\partial x} - N_\beta \beta_e \right)^2 dx \quad (4.24)$$

Efectuando agora as derivações, como em (4.20), vamos obter o seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_{Tot}}{\partial \mathbf{u}_e} = EA \int_0^L \left(N_u'^T N_u' \mathbf{u}_e - \frac{1}{2} N_u'^T \left(N_w' \mathbf{w}_e \right)^2 \right) dx = \mathbf{F}_{u_e} \\ \frac{\partial U_{Tot}}{\partial \mathbf{w}_e} = EA \int_0^L \left(- \left(\left(N_w'^2 \right)^T N_u' \right) \mathbf{w}_e \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \left(N_w'^T N_w' \right)^T \left(N_w' \right) \left(\mathbf{w}_e \right)^2 \mathbf{w}_e \right) dx + \\ \quad GAk \int_0^L \left(N_w'^T N_w' \mathbf{w}_e - N_w'^T N_\beta \beta_e \right) dx = \mathbf{F}_{w_e} \\ \frac{\partial U_{Tot}}{\partial \beta_e} = GAk \int_0^L \left(- N_\beta^T N_w' \mathbf{w}_e + N_\beta^T N_\beta \beta_e \right) dx + EI \int_0^L \left(\frac{\partial(N_\beta \beta_e)}{\partial x} \right) dx = \mathbf{M}_{\beta_e} \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Este sistema, não sendo útil para a solução do problema no sentido de se obter a configuração da viga sob um sistema de forças externas, será fundamental para avaliar a convergência para a solução ao usar o algoritmo iterativo de Newton-Raphson.

A versão do método de Newton-Raphson utilizada para esta solução foi descrita no capítulo anterior. Em alternativa, pode usar-se a matriz secante, tal como se descreve esquematicamente na figura 4.3. Essencialmente, o processo decorre deste modo:

Vamos primeiro efectuar a linearização do problema entre incrementos de força ou deslocamento; no presente estudo, efectuaremos a aproximação ao problema prescrevendo incrementos de forças em vez de deslocamentos. Usamos a expressão da energia de deformação (4.24) modificada se como segue:

$$U_{Tot} = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial(N_u \mathbf{u}_e)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(N_w \mathbf{w}_e)}{\partial x} \right)^2 \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial(N_\beta \beta_e)}{\partial x} \right)^2 + \frac{GAk}{2} \left(\frac{\partial(N_w \mathbf{w}_e)}{\partial x} - N_\beta \beta_e \right)^2 dx$$

Os deslocamentos $\left(\frac{\partial(N_w \mathbf{w}_e)}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial N_w}{\partial x} \mathbf{w}_e \right)^2$ são modificados passando a referir-se a uma *configuração actual* da estrutura: $\left(\frac{\partial N_w}{\partial x} \mathbf{w}_e \right)^2 \simeq \left(\frac{\partial N_w}{\partial x} \right)^2 (\mathbf{w}_e)_{actual} (\mathbf{w}_e)$, onde apenas o vector (\mathbf{w}_e) é efectivamente incógnita, enquanto $(\mathbf{w}_e)_{actual}$ é conhecido da *iteração anterior*. Este procedimento permite linearizar a matriz de rigidez e obtê-la com simetria a partir das derivações em (4.25), passando esta a ser uma matriz de *rigidez secante* $[K_t]_{sec}$. Pode-se demonstrar isto efectuando as derivações na expressão da energia de deformação (4.24) agora modificada:

$$U_{Tot} = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial(N_u \mathbf{u}_e)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_w}{\partial x} \right)^2 (\mathbf{w}_e)_{actual} \mathbf{w}_e \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial(N_\beta \beta_e)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{GAk}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial(N_w \mathbf{w}_e)}{\partial x} - N_\beta \beta_e \right)^2 dx \quad (4.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_{Tot}}{\partial \mathbf{u}_e} = EA \int_0^L \left(N_u'^T N_u' \mathbf{u}_e - \frac{1}{2} N_u'^T N_w'^2 (\mathbf{w}_e)_{actual} \mathbf{w}_e \right) dx = \mathbf{F}_{u_e} \\ \frac{\partial U_{Tot}}{\partial \mathbf{w}_e} = EA \int_0^L \left(-\frac{1}{2} \left(\left(N_w'^2 \right)^T N_u' \right) (\mathbf{w}_e)_{actual} \mathbf{u}_e + \frac{1}{4} \left(N_w'^T N_w' \right)^T \left(N_w'^T N_w' \right) (\mathbf{w}_e)_{actual}^2 \mathbf{w}_e \right) dx + GAk \int_0^L \left(N_w'^T N_w' \mathbf{w}_e - N_w'^T N_\beta \beta_e \right) dx = \mathbf{F}_{w_e} \\ \frac{\partial U_{Tot}}{\partial \beta_e} = GAk \int_0^L \left(-N_\beta^T N_w' \mathbf{w}_e + N_\beta^T N_\beta \beta_e \right) dx + EI \int_0^L \left(\frac{\partial(N_\beta) \beta_e}{\partial x} \right) dx = \mathbf{M}_{\beta_e} \end{array} \right. \quad (4.27)$$

(faz-se notar que o vector $(\mathbf{w}_e)_{actual}$ sendo constante em cada incremento, não é derivável).

Tendo obtido a matriz secante, resume-se a seguir o procedimento sobre o método iterativo para a solução não linear geométrica em discussão.

- O vector das reacções internas é prescrito de modo incremental começando com $\{\mathbf{R}\}_{t+\Delta t}^R = \{\mathbf{R}\}_t^R + \{\Delta R\}^R$ ou neste caso particular de início de iteração:
 $\{\mathbf{R}\}_1^R = \{\mathbf{R}\}_0^R + \{\Delta R\}^R$; o vector de deslocamentos é obtido resolvendo:
 $\{\mathbf{R}\}_1^R = [K_0]_{sec}\{\mathbf{X}\}_1^L$; porém, o vector efectivo de reacções internas é este:
 $\{\mathbf{R}\}_2^R = (\int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [B]^T [D] [B] dx dz) \{\mathbf{X}\}_1^L$. Este valor difere do anterior por uma quantidade residual já referida.
- Com o vector $\{\mathbf{R}\}_2^R$, obtém-se $\{\mathbf{X}\}_2^L$ resolvendo o sistema de equações:
 $\{\mathbf{R}\}_2^R = [K_1]_{sec}\{\mathbf{X}\}_2^L$ onde $[K_1]_{sec}$ é a matriz de *rigidez secante* (4.25), que tem os deslocamentos substituídos da iteração anterior agora referente à iteração anterior; agora instante "actual".
- Nova substituição deste vector $\{\mathbf{X}\}_2^L$ em (4.27) permite obter nova matriz secante $[K_2]_{sec}$; por sua vez, $\{\mathbf{X}\}_2^L$ permite gerar o vector $\{\mathbf{R}\}_3^R$, vector efectivo de reacções internas usando esta equação:
 $\{\mathbf{R}\}_3^R = (\int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [B]^T [D] [B] dx dz) \{\mathbf{X}\}_2^L$ (esta equação produz o mesmo efeito que a (4.25)). Este vector passa a ser o vector 2º membro no sistema; $\{\mathbf{R}\}_3^R = [K_2]_{sec}\{\mathbf{X}\}_3^L$;
- O vector $\{\mathbf{X}\}_3^L$ é substituído em (4.27) gerando nova matriz secante $[K_3]_{sec}$; por sua vez, $\{\mathbf{X}\}_3^L$ permite obter $\{\mathbf{R}\}_4^R = (\int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [B]^T [D] [B] dx dz) \{\mathbf{X}\}_3^L$; agora novo vector de deslocamentos $\{\mathbf{X}\}_4^L$ é obtido resolvendo $\{\mathbf{R}\}_4^R = [K_3]_{sec}\{\mathbf{X}\}_4^L$.

O processo termina quando o valor residual entre o último vector $\{\mathbf{R}\}_{t+\Delta t}^R$ e o vector de forças externas for inferior a uma tolerância estabelecida. A figura 4.3 resume os procedimentos anteriormente mencionados.

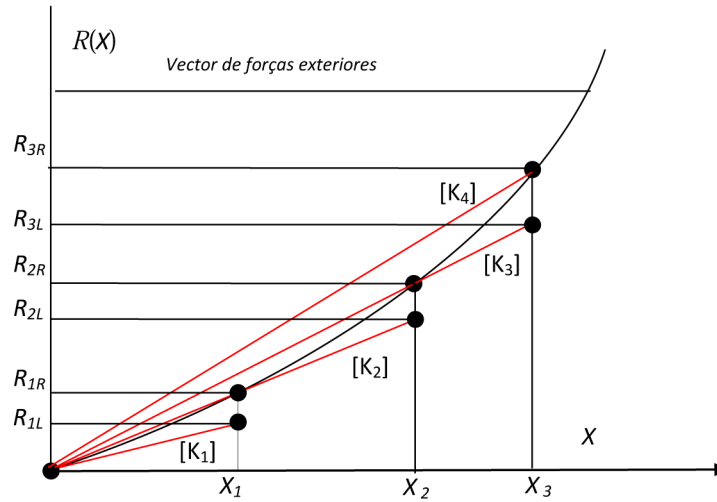


Figura 4.3: Esquema de iteração de Newton-Raphson com matriz secante numa estrutura com rigidez crescente

É interessante notar que, se não houver a etapa de "correção" do vector de reacções internas da estrutura (em que R_{iL} passa a R_{iR}), se os incrementos de força forem bem pequenos, então logo no arranque do processo consegue-se uma evolução do método iterativo de modo bastante próximo ao do comportamento efectivamente esperado. A figura 4.4 mostra esquematicamente como se processa a evolução iterativa assim descrita:

- O primeiro incremento de força permite, com uma matriz de rigidez inicial, obter um deslocamento, que naturalmente não coincide com o correspondente ao vector efectivo de reacção interna da estrutura. X_1^R .
- Deste modo, fica logo ao início incluído um erro residual no processo iterativo, se este prosseguir sem a correcção da reacção interna obtida pela linearização da matriz do sistema como foi descrito.
- O processo termina se for considerado que o vector final de forças exteriores prescrito à estrutura está suficientemente próximo do vector que é incrementado em cada etapa; no entanto, aparece um resíduo referente ao vector de deslocamentos, tal como descrito.

Este processo de resolver problemas não lineares sem o controlo do erro entre vectores de reacção interna em estruturas apresentando um comportamento elástico não é garantia de rigor, naturalmente. Não se pode assegurar que a solução iterativa mantenha o erro residual em relação ao comportamento estruturalmente esperado, uma vez que não se efectua controlo nesse resíduo.

Com o devido controlo de resíduo entre o vector efectivo de reacção interna e o obtido pela linearização da matriz (método da secante), o método da matriz secante é de estruturação mais simples em programa de computador, embora leve a resíduos maiores do que no caso da matriz tangente. Este inconveniente não representa importante limitação uma vez que os computadores actuais processam cálculos a velocidades cada

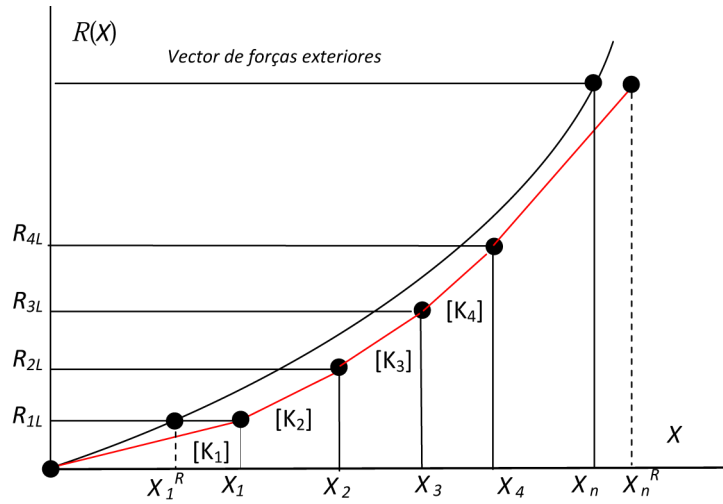


Figura 4.4: Algoritmo de iteração pelo método do sistema 4.27 sem controlo do equilíbrio em relação ao vector efectivo de reacções internas

vez maiores, não sendo pois significativo a diferença de eficácia se houver necessidade de se refinar os incrementos e consequentemente aumentar o número de iterações.

4.4 Síntese sobre o método de Newton-Raphson em problemas não linear-geométricos

Foram resumidos os procedimentos referentes ao modo operativo do método de Newton-Raphson na solução iterativa de problemas não lineares. A aplicação deste método em problemas de análise estrutural é de grande utilidade e precisão, sendo também um algoritmo de programação relativamente fácil em cálculo computacional automático. Em problemas não lineares em Mecânica de Estruturas, a utilização da matriz tangente, torna o problema "localmente linear"(quer dizer, dentro de um intervalo de iteração) e vincula efectivamente este algoritmo ao Método de Newton na sua versão original. Já a utilização da matriz secante consiste numa aproximação ao Método de Newton, não o sendo de facto quando comparado com a sua versão original. Independentemente da semelhança dos dois algoritmos referidos em relação ao processo iterativo original, estas duas ferramentas numéricas são muito eficazes e rigorosas na solução aproximada de problemas não lineares em Mecânica de Estruturas, havendo precisão com o método da matriz tangente, mas maior simplicidade de programação com a técnica da matriz secante.

Parte III

Implementação FORTRAN90

Capítulo 5

Cálculo automático da solução iterativa

5.1 Estrutura do programa FORTRAN90

Foram obtidas a estrutura das soluções para dois tipos de elementos de viga; formulados por polinómios hermitianos (para um modelo de deformação de Euler-Bernoulli) e por funções de forma lineares (para o elemento de Timoshenko-Mindlin, com deformação de corte transversal e a rotação das secções transversais independentes da derivada da linha elástica). A solução de problemas de flexão de vigas como os descritos necessitou da obtenção da matriz de rigidez, a qual depende do campo de deslocamentos em cada instante de deformação (em cada etapa de iteração da solução, tal como descrito). O método iterativo consiste no de Newton-Raphson, muito usado em problemas como este, dado o seu rigor, bom controlo de convergência e facilidade em programação computacional. Não havendo neste estudo lugar a alteração das propriedades mecânicas do material, resta o tratamento numérico de resultados intermédios em cada etapa do algoritmo iterativo que se destinam a actualizar a forma da estrutura deformada e a matriz de rigidez devidamente linearizada como descrito.

Basicamente, o programa está organizado em blocos a seguir descritos:

- As propriedades do material, o número de nós, de elementos e as coordenadas dos nós. Estas estão referidas ao sistema de eixos inicial, o qual será conhecido como referencial inicial ou geral.
- Lidas também as dimensões da secção transversal para que se conheça a sua geometria e eixos principais de inércia (a secção transversal poderia ser variável elemento para elemento e mesmo em cada elemento, mas tal não foi efectuado neste trabalho)
- Definição das condições de fronteira e sistema de forças externas.
- Definição do incremento de força (ou deslocamento), tolerância em relação ao valor final para terminar e número limite de iterações.

5.2 Diagrama de sequência do programa de cálculo

Este ponto complementa o anterior, mas agora com um diagrama para melhor interpretação de definição das fases do processo iterativo.

A figura 5.1 esquematiza o diagrama de operação do programa que foi desenvolvido para o cálculo da deformação não linear de vigas formadas com os elementos descritos.

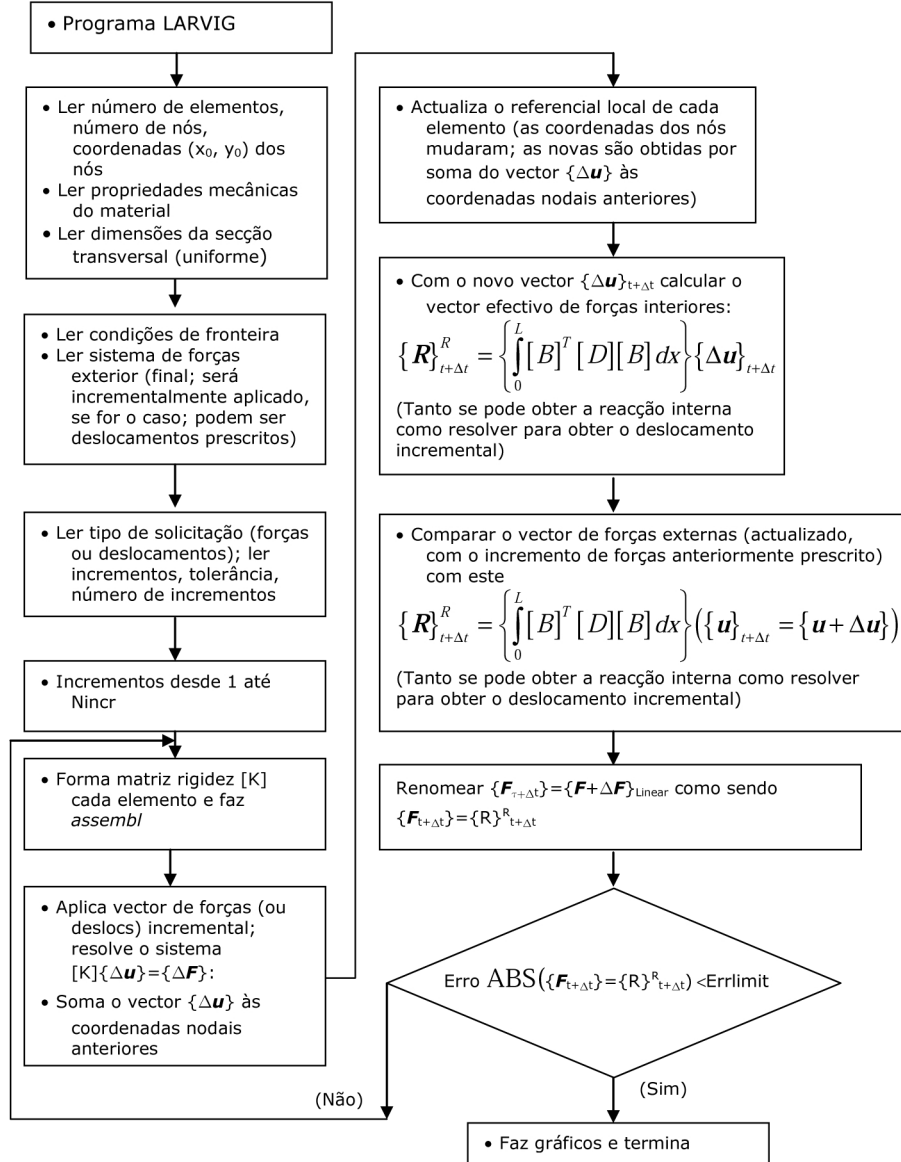


Figura 5.1: Diagrama de sequência do problema iterativo de flexão da viga com o Método de Newton-Raphson

5.3 Exemplos

5.3.1 Elemento de formulação hermitiana: Força transversal

A fim de testar o desempenho e precisão dos elementos desenvolvidos para flexão de vigas são estudados casos resolvidos com os dois tipos de elementos. O elemento de Euler-Bernoulli é analisado a seguir, num exemplo em que uma viga encastrada é submetida a uma força transversal no bordo livre. As características e dimensões da estrutura são as seguintes:

- Comprimento (viga horizontal) $L = 1.2m$
- Secção: largura $b = 0.2m$; espessura $h = 0.008m$ (na direcção do plano de flexão)
- Material: Módulo de Young $E = 18GPa$; $\nu = 0.2$
- Número de elementos: 25 ($L_e = 0.048m$)
- Força $F = 100N$ (transversal, 10 incrementos de $10N$) no nó extremo 26

A figura 5.2 mostra a forma da viga sob flexão onde se pode observar o "recuo" do ponto de aplicação em relação à posição inicial. O deslocamento do nó 26 (ponto de aplicação da força transversal) é de $0.657m$, sendo o recuo horizontal de $1.2 - 1.141 = 0.059m$ ($= 59mm$). Tal facto mostra como a viga adquire maior rigidez virtualmente, pois de facto, o que acontece é que o ponto de aplicação recua e diminui o momento-flector, diminuindo o deslocamento em relação ao resultado obtido por análise linear teórica, o qual é:

$$w_{linear} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{100 \times 1.2^3}{3 \times (1.8E10) \times \left(\frac{0.2 \times 0.008^3}{12}\right)} = 0.375m$$

(a tolerância entre a força efectiva e a força linearmente incrementada não excede $1N$)

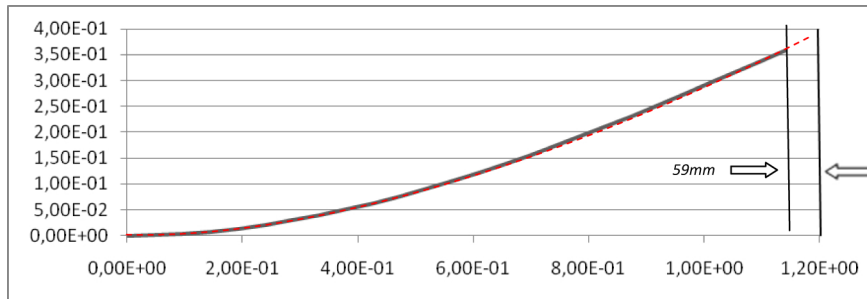


Figura 5.2: Flexão de viga encastrada com força transversal no extremo livre, comparação com solução linear (elemento de Euler-Bernoulli)

5.3.2 Elemento de formulação Timoshenko-Mindlin: Força transversal

Resolveu-se o mesmo problema mas agora com um elemento de Timoshenko-Mindlin. Calculando a matriz de rigidez deste elemento com integrações analíticas, os termos referentes a factores de corte transversal geram um fenómeno numérico conhecido por *retenção* de corte transversal (*Shear locking*); basicamente diz-se que o elemento apresenta grande rigidez devido a "bloqueio" da deformação de corte. Para resolver este problema, usa-se integração reduzida. Antes de descrever esta técnica resume-se aqui em que consiste a integração numérica gaussiana. Como o termo indica, pretende-se obter o resultado numérico de integrais definidos. O procedimento consiste em estabelecer um somatório em que as parcelas são valores da função integranda em pontos de gauss (obtidos em tabelas) multiplicado cada um por um factor de ponderação (factor de peso). Se a função integranda for polinomial (como de resto acontece em problemas de elementos finitos) os valores exactos com integração numérica são obtidos usando o mesmo número de pontos de gauss dado por $2n - 1$, sendo n o grau do polinómio da função integranda. Se se usar menos pontos do que esta regra efectua-se o que se chama integração reduzida a qual é a técnica fundamental para eliminar o fenómeno de *shear locking* gerado com o elemento de Timoshenko-Mindlin. Neste caso usa-se então e apenas nos termos referentes à rigidez associada transversal, apenas um único ponto de integração numérica (integração reduzida selectiva). Este procedimento é de grande eficácia assegurando soluções muito semelhantes à do elemento de Euler-Bernoulli.

Os resultados são muito semelhantes, como se pode verificar, mostrando a coerência física dos modelos de deformação usados (tabela anexa e figura 5.3).

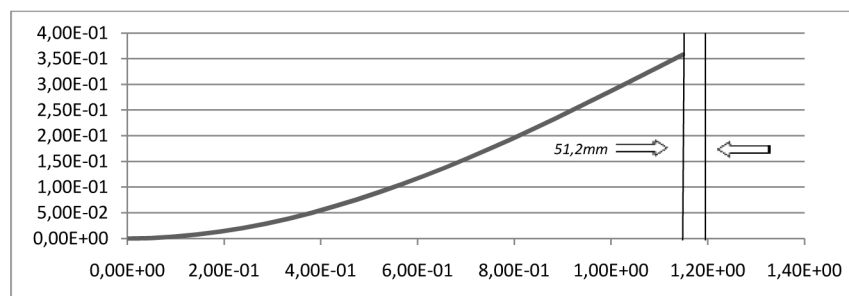


Figura 5.3: Flexão de viga encastrada com força transversal no extremo livre (elemento de Timoshenko-Mindlin)

5.3.3 Elemento de formulação hermitiana: Momento puro no extremo livre

O exemplo a seguir é de uma viga modelada com elementos hermitianos mas agora sob flexão pura no extremo livre; todas as dimensões e propriedades mecânicas inalteradas.

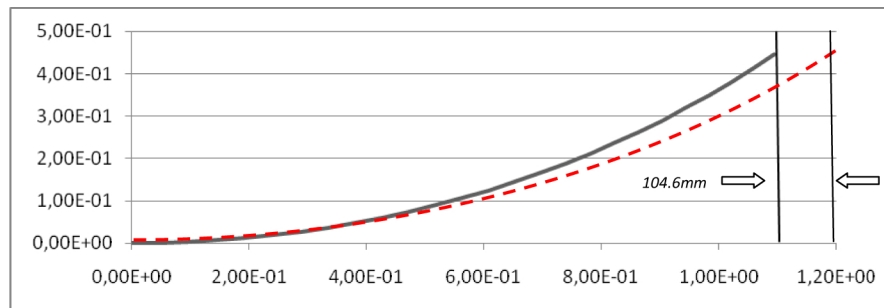


Figura 5.4: Viga encastrada sob flexão pura ($100Nm$), (Hermitiana) momento aplicado em 10 incrementos ($10Nm$ cada); comparação com solução linear

O aspecto gráfico deixa evidente a forma praticamente circular que deve ser esperada, mas agora em regime de grandes deslocamentos. Isto não pode ser observado com a solução linear teórica. O resultado obtido pela Mecânica de Estruturas linear é:

$$w_{linear} = \frac{ML^2}{2EI} = \frac{100 \times 1.2^2}{2 \times (1.8E10) \times \left(\frac{0.2 \times 0.008^3}{12}\right)} = 0.46875m$$

5.3.4 Elemento de formulação Timoshenko-Mindlin: Momento puro no extremo livre

Resolvido o mesmo problema mas agora com elementos de viga de Timoshenko-Mindlin; também uma boa estabilidade do resultado é observada, sendo os valores do deslocamento do nó livre praticamente iguais nas duas soluções (tabela anexa e figura 5.5).

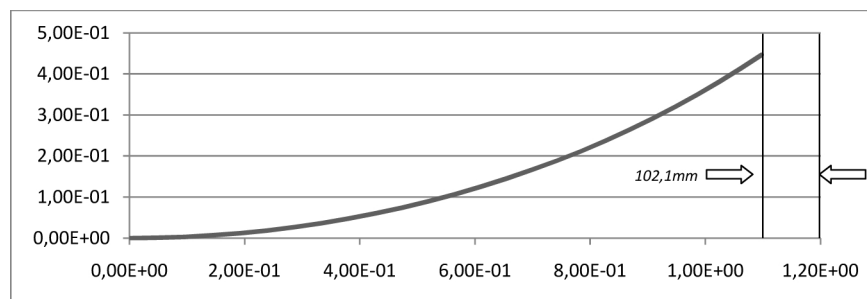


Figura 5.5: Viga encastrada sob flexão pura ($100Nm$), (Timoshenko-Mindlin) momento aplicado em 10 incrementos ($10Nm$ cada)

5.4 Verificação experimental

A fim de comprovar o rigor da solução apresentada, foi realizada uma montagem experimental de grande simplicidade e custo mínimo, unicamente destinada a verificar precisão

do resultado obtido com os elementos finitos propostos e uma viga encastrada (*cantilever*) montada num sistema experimental. A flexão foi realizada com um fio tenso por pesos e fixo ao extremo livre da viga.



(a) Visão Geral

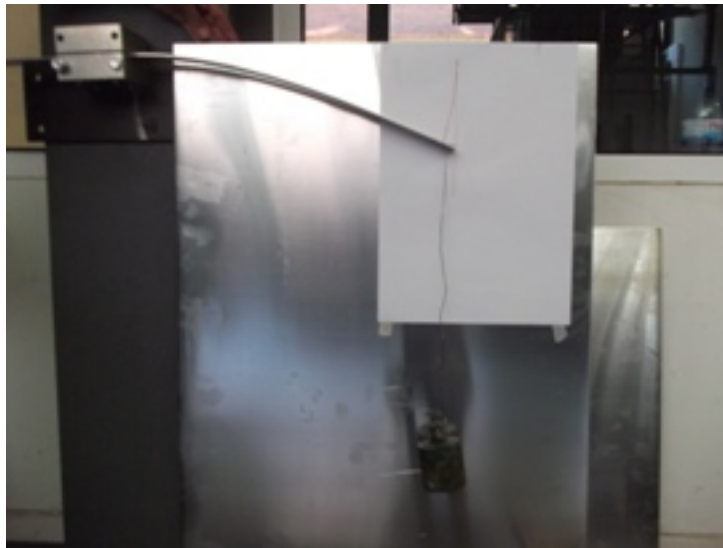


(b) Pormenor comprimento da viga

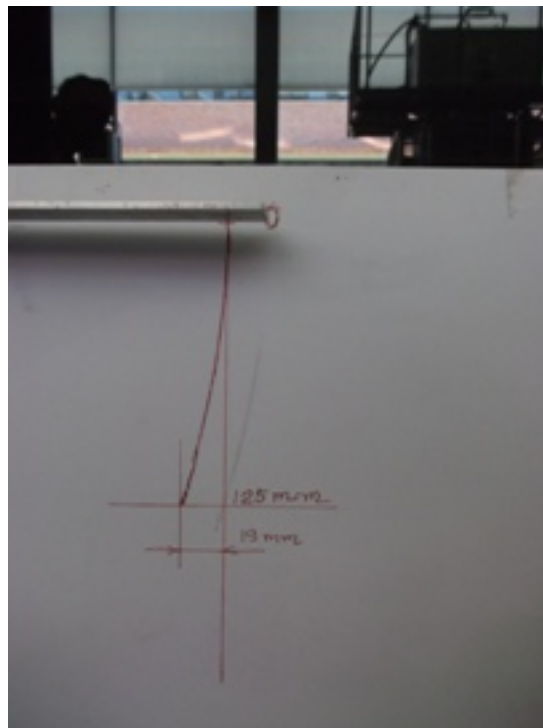


(c) Pormenor do ponto de aplicação da carga

Figura 5.6: Montagem Experimental



(a) Visão geral



(b) Pormenor resultado final

Figura 5.7: Ensaio Experimental

5.4.1 Resultado numérico

- Comprimento da viga: $L = 485mm$
- Secção: largura $b = 0.04m$; espessura $h = 0.003m$
- Módulo de Young usado na verificação numérica: $68GPa$, que se refere a alumínio

comercial laminado; uso em perfis de construção e decoração de interiores) [11]

- Força: $19.6N$

► Elemento de formulação hermitiana

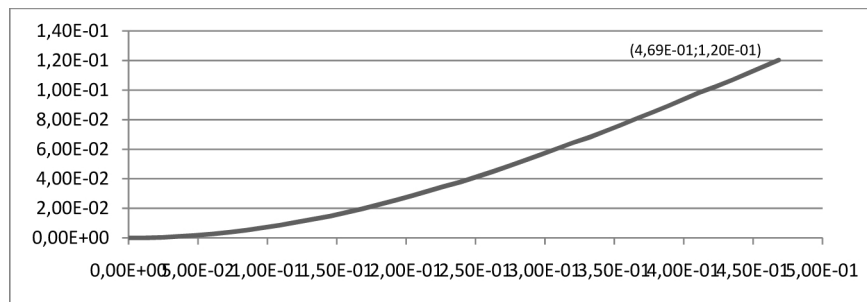


Figura 5.8: Resultado numérico, modelo ensaiado (Hermitiana)

- Deslocamento horizontal: $16.5mm$ (erro $\simeq 0.53\%$)
- Deslocamento vertical: $120.3mm$ (erro: $\simeq 3.68\%$)

► Elemento de formulação Timoshenko-Mindlin

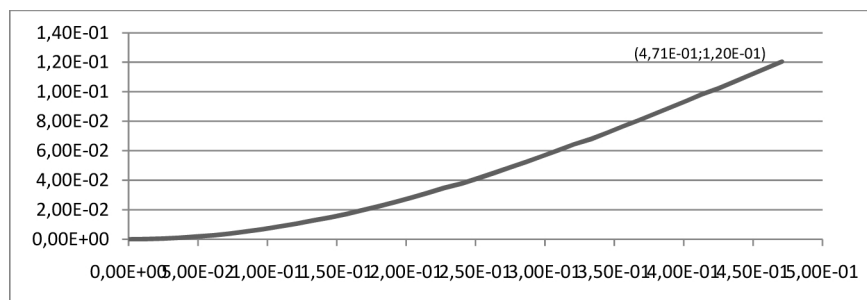


Figura 5.9: Resultado numérico, modelo ensaiado (Timoshenko-Mindlin)

- Deslocamento horizontal: $14.3mm$ (erro $\simeq 1.00\%$)
- Deslocamento vertical: $120.4mm$ (erro: $\simeq 3.68\%$)

O resultado teórico com fórmula simples de mecânica de estruturas é $124mm$; é inferior ao medido, o qual deveria ser superior, desta forma sugere que a viga deve ter uma pequena rotação no encastramento, pode ser devido a raios de concordância nas maxilas ou falta de alguma perfeição de faces rigorosamente planas.

O procedimento experimental teve a tensão de flexão muito perto da cedência do alumínio comercial usado neste tipo de acessórios (régua decorativas). Se fosse reduzido o comprimento da viga mais cargas poderiam ser aplicadas; contudo perdia-se a flexibilidade desejada para grandes deslocamentos.

Parte IV

Conclusão

O modelo de aproximação proposto, o qual consiste num elemento finito de 2 nós, teve dois modos de abordagem:

- Desenvolvimento de um elemento de funções hermitianas com modo de deformação de Euler-Bernoulli. Este elemento, formulado com termos não lineares para permitir a modelação de grandes deslocamentos, assegurou uma deformada de boa continuidade mesmo com baixo numero de elementos. O principal defeito deste elemento incide no facto de não ser exacto para análise da flexão de vigas espessas, uma vez que nas deformações não inclui os termos de corte.
- Desenvolvimento de um elemento de funções de primeira ordem com modo de deformação de Timoshenko-Mindlin. Neste elemento, os deslocamentos transversais e as rotações das secções são independentes (significa formulação *separada*). A inserção de termos não lineares nas deformações (para grandes deslocamentos), além de assegurar uma deformada contínua (se bem que consistindo em segmentos de recta entre os nós da malha, tem a vantagem de incluir termos de energia de deformação por corte, ao contrário do de hermite). O principal defeito deste elemento está na tendência em sobrestimar os termos de corte na matriz de rigidez (*shear-locking*) sendo contudo este defeito quase eliminado recorrendo a integração numérica reduzida (1 ponto de Gauss)

A solução do problema de vigas em grandes deslocamentos poderia ter seguido a que foi proposta por Reddy [7]; contudo preferiu-se neste trabalho fazer a actualização do referencial, no qual o elemento é representado nas coordenadas locais, ao fim de cada iteração. Este modo de proceder simplificou o programa de computador, uma vez que a rotina na matriz de rigidez era usado de modo repetitivo, permitindo uma boa precisão nos resultados, porquanto se utilizava a matriz de transformação de coordenadas locais para as coordenadas globais. Este modo de proceder é mais preciso do que aproximar a inclinação dos elementos de viga em relação ao eixo recto inicial utilizando o termo quadrático da inclinação dw/dx tal como faz Reddy.[7]

No que respeita à formulação dinâmica este é um trabalho para efectuar posteriormente sendo no entanto previsível que a utilização dos elementos aqui descritos terá um bom desempenho em problemas dinâmicos em que a viga vibra com grandes amplitudes.

Parte V

Futuro desenvolvimento

Capítulo 6

Tópicos avançados e futuro desenvolvimento do tema

6.1 Sumário sobre o desempenho dos elementos analisados

Foram demonstradas as capacidades do elemento de viga em duas formulações; o modelo de deformação de Euler-Bernoulli, com funções de forma hermitianas cúbicas e o modelo de Timoshenko-Mindlin, com capacidade de evidenciar deformação de corte transversal, ainda que de 1ª ordem apenas. Este elemento tem que ser obtido por integração reduzida selectiva, a fim de evitar o problema numérico de rigidificação nos termos de corte (*shear locking*) ocorrendo em elementos de viga finos (espessura vs comprimento em relações inferiores a 0.1). Este defeito não se regista no elemento hermitiano, o que faz dele ideal para malhas de poucos elementos, obtendo-se excelente continuidade na deformada; contudo, a falta de capacidade de definir o estado de tensão de corte transversal é uma limitação que pode ser ultrapassada usando equações de equilíbrio de forças e momentos em duas secções transversais infinitamente próximas.

Os problemas estudados referem-se apenas a não linearidade geométrica, decorrente do modelo de deformação contendo termos não lineares. Estes termos são necessários em caso de flexão de vigas apresentando média a grande amplitude, assim gerando interacção com os termos de deformação axial (extensão/contractão) tal como discutido nos capítulos anteriores. O teste experimental demonstrou o bom desempenho das formulações usadas no elemento finito descrito, tendo sido possível com uma experiência bem simples e de baixo custo, verificar o rigor do modelo numérico.

6.2 Desenvolvimento do tema: aplicação às vigas laminadas

Em aplicações estáticas para o elemento de viga descrito, o tema de imediata sugestão para futuro desenvolvimento consiste em enquadrar este elemento no campo de vigas laminadas, ou seja, como estrutura em materiais compósitos. Mais trabalho é necessário na formulação nomeadamente na caracterização do estado de tensão na secção transversal destas novas vigas, o qual deve ser definido em cada camada da estrutura laminada. Uma técnica possível consiste em formular cada camada como elementos rectangulares de modo misto, associado aos nós tensões e deslocamentos de continuidade entre as camadas adjacentes [18]. Existe um grande número de soluções para obter elementos finitos

tipo viga em materiais compósitos, como refere J.N. Reddy [9]. Neste trabalho, Reddy apresentou as linhas de desenvolvimento do seu elemento *"layer-wise"* caracterizando o estado de tensão inter-laminar de modo a garantir a continuidade entre camadas. Os materiais compósitos tem uma impressionante área de aplicações, abrangendo praticamente todas as áreas tecnológicas da actualidade (habitação, rodovias, indústria automóvel, aeronáutica, armamento, aeroespacial, biomecânica..). Tal constatação justifica que o enquadramento nos materiais compósitos do desenvolvimento futuro do estudo apresentado seja oportuno.

6.3 Aplicações dinâmicas

Os procedimentos convencionais no projecto de estruturas tem como um dos objectivos mais importantes o de minimizar os deslocamentos nas estruturas ou mecanismos quando tais sistemas estão sob esforço. Amplitudes excessivas nos deslocamentos podem afectar a integridade da estrutura ou o bom funcionamento das peças integrando conjuntos cinemáticos. Um critério de dimensionamento não pode contudo ignorar que a estrutura desenhada com base em elevada rigidez, será dispendiosa e pesada, de modo que alguma tolerância à flexibilidade deve ser considerada no projecto e cálculos intermédios. Apesar das boas práticas actualmente adoptadas pelos projectistas em desenho estrutural apontarem para distorções mínimas nas estruturas, há aplicações em que é necessário admitir o funcionamento em regime de grandes deslocamentos sob esforço; este é o caso de canas de pesca desportiva para mar alto e varas para a prática de salto. A figura 6.1 mostra a grande deformação verificada em esforço dinâmico que aquele acessório suporta na fase de elevação da campeã australiana Kym Howe (Jogos Olímpicos de Pequim, 2008).

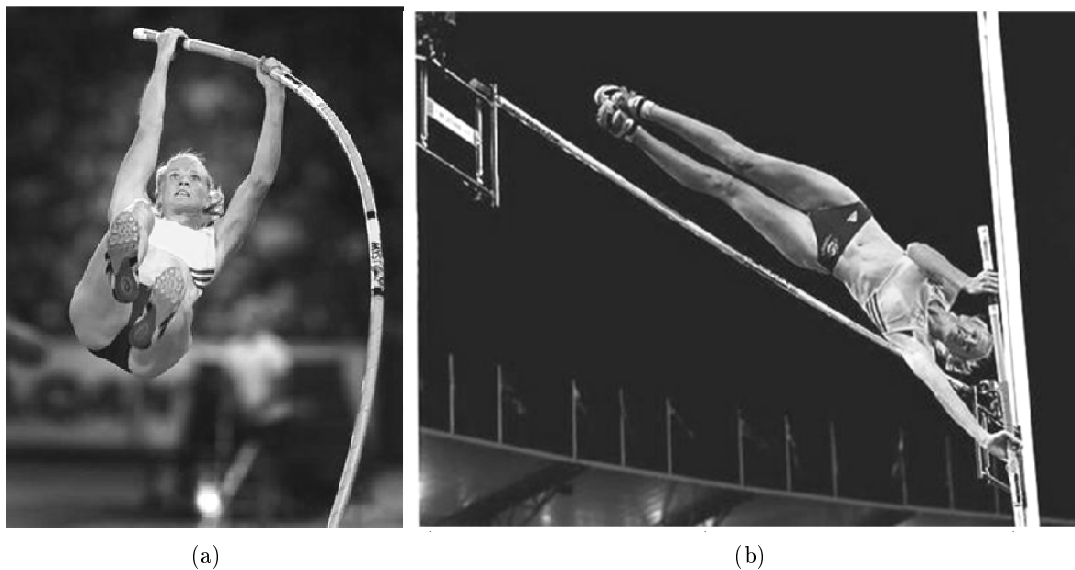


Figura 6.1: A atleta Kym Howe (Australia) na prática do salto à vara (Jogos Olímpicos, Beijing 2008)

As técnicas com elementos finitos são frequentemente usadas na modelação do comportamento dinâmico de vigas sob flexão. Para prosseguir neste objectivo, é necessário

partir da equação de equilíbrio da estrutura sob forças em regime dinâmico:

$$[M] \ddot{\mathbf{U}} + [C] \dot{\mathbf{U}} + [K] \mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (6.1)$$

Onde $\ddot{\mathbf{U}}$, $\dot{\mathbf{U}}$ e \mathbf{U} são, os vectores de aceleração, velocidade e deslocamento da estrutura; $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são as matrizes (associadas ou montadas) de massa, amortecimento (viscoso) e rigidez, enquanto $\mathbf{F}(t)$ é o vector de forças externas (dependentes do tempo). Reescrevendo a equação 6.1 para o instante de tempo $t + \Delta t$, virá:

$$[M] \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + [C] \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + [K] \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} \quad (6.2)$$

A partir do conceito de aceleração e velocidade media, valores actualizados no tempo, para o deslocamento e velocidade podem ser assim obtidos:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{t+\Delta t} &= \mathbf{U}_t + 0.5\Delta t (\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \dot{\mathbf{U}}_t) \\ \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{U}}_t + 0.5\Delta t (\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{U}}_t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

A substituição das expressões (6.3) em (6.2), com ordenação de um lado e de outro da equação para os instantes $t + \Delta t$ e t , obtém-se:

$$\begin{aligned} ([M] + 0.5\Delta t [C] + 0.25\Delta t^2 [K]) \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \\ \mathbf{F}_{t+\Delta t} - [K] (\mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + 0.25\Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_t) - [C] (\dot{\mathbf{U}}_t + 0.5\Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Este é o algoritmo de Newmark ou da *aceleração constante*. Em problemas lineares, a matriz de rigidez total (associada ou montada) é calculada apenas uma vez, permanecendo constante durante todo o tempo de solicitação da estrutura. Resolvendo (6.4) para $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$, os vectores $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ e $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ podem ser obtidos por (6.3)[2]

6.4 Formulação do problema dinâmico de grandes deslocamentos em vigas

Como já referido anteriormente, a solução para este problema necessita de aproximação incremental, onde o vector de forças inclui desta vez o contributo de forças de inércia. O algoritmo incremental mais usado é o de Newmark quando o regime dinâmico transiente ou permanente não inclua frequências muito altas (acima de $500Hz$, é considerada uma frequência relativamente alta para análise estrutural dinâmica com elementos de viga). Identificando mais uma entidade, a reacção estrutural interna $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ como sendo a força interna desenvolvida na estrutura quando aquela é solicitada por vectores de forças externas ou deslocamentos prescritos, outra forma de escrever a equação de equilíbrio para o instante de tempo $t + \Delta t$ é:

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{R}_{t+\Delta t} - \mathbf{D}_{t+\Delta t} = [M] \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \quad (6.5)$$

Onde $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$, $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ e $\mathbf{D}_{t+\Delta t}$ são respectivamente, o sistema de forças externas, as reacções internas e forças de amortecimento, sendo por sua vez $[M]$ e $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ a matriz de massa e o vector de acelerações. A soma dos vectores de forças externas, de amortecimento e as reacções interiores deve igualar as forças de inércia. Se as forças de amortecimento dependerem do vector velocidade da estrutura (amortecimento tipo viscoso), então

o vector de forças de amortecimento resulta de um produto da forma $\mathbf{D}_{t+\Delta t} = [C] \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ onde $[C]$ é a matriz de amortecimento. A equação (6.5) pode reescrever-se considerando que os vectores referentes ao instante $t + \Delta t$ são actualizados de modo incremental a partir do instante anterior t . Fazendo $\mathbf{R}_{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{R}_{t+\Delta t} + \mathbf{R}_t$ e $\mathbf{D}_{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{D}_{t+\Delta t} + \mathbf{D}_t$, equação (6.5), permite obter:

$$[M] + \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \Delta \mathbf{R}_{t+\Delta t} + \mathbf{R}_t + \Delta \mathbf{D}_{t+\Delta t} + \mathbf{D}_t = \mathbf{F}_{t+\Delta t} \quad (6.6)$$

É assumido que durante o incremento temporal Δt a estrutura se deforma de modo linear de acordo com a matriz de rigidez "actual" $[K]_t$. A alteração da matriz de rigidez é obtida de modo incremental:

$$\Delta \mathbf{R}_{t+\Delta t} = [K]_t \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t} \quad (6.7)$$

Onde $[K]_t$ se obtém das equações (3.28) segundo o modelo de hermite ou por (4.25) segundo o modelo de Timoshenko.

O novo vector de velocidades é também obtido por (6.3), depois de substituir a primeira equação de (6.3) na segunda, obtém-se o deslocamento incrementado:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= 0.5\Delta t \left(\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{U}}_t \right) \\ \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t} &= \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + 0.25\Delta t^2 \left(\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{U}}_t \right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Se, por sua vez, também as forças de amortecimento dependerem de uma matriz de amortecimento $[C]$, que permanece constante durante Δt , a expressão final de (6.6) é:

$$\begin{aligned} ([M] + 0.5\Delta t [C] + 0.25\Delta t^2 [K]_t) \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \\ \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{R}_t - (\Delta t [K]_t + [C]) \dot{\mathbf{U}}_t - (0.5\Delta t [C] + 0.25\Delta t^2 [K]_t) \ddot{\mathbf{U}}_t \end{aligned} \quad (6.9)$$

Tendo calculado um novo vector de aceleração $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ por (6.9), novos vectores incrementais para a velocidade e deslocamento são obtidos, primeiro por (6.3) e depois por (6.9), permitindo deste modo obter-se por (6.7) um incremento actualizado $\Delta \mathbf{R}_{t+\Delta t}$ para o vector de reacções internas. Este incremento é somado a \mathbf{R}_t dando lugar ao vector: $\mathbf{R}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_t + \Delta \mathbf{R}_{t+\Delta t}$, actualizando assim as reacções internas da estrutura, concluindo o ciclo iterativo com o algoritmo (6.9). Deste ponto, renomeia-se $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ como sendo \mathbf{R}_t e os vectores $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ como $\dot{\mathbf{U}}_t$ e $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ como \mathbf{U}_t .

Ainda que o método de Newmark [2] seja incondicionalmente convergente, isto não significa que tal aconteça para a solução exacta; com efeito, há um intervalo de iteração Δt que, se excedido, leva o método de Newmark a apresentar resultados bastante errados, apesar da sua estabilidade [5]. O máximo Δt para garantir precisão deve ser $\Delta t \leq \Delta t_{max} = 0.1 \times T_N$ onde T_N é o período associado à frequência natural de ordem N^{th} da estrutura [5].

Este resumo sobre o desenvolvimento do método na análise dinâmica de vigas sob flexão é assunto que, como referido, pode constituir área de futuro desenvolvimento desta tese. Foi desta forma que se referiu aqui o método, contudo sem maior extensão, deixando essa tarefa para futuro desenvolvimento.

Bibliografia

- [1] Timoshenko, S., *History of strength of materials*, McGraw-Hill, 1953
- [2] Newmark, N.M., *A method of computation for structural dynamics*, ASCE Engineering Mechanics Division 85 (EM3) **67-94**, 1959
- [3] B S Hockley, *Holographic visualization of large amplitude vibration using reference beam phase modulation*, J. Phys. E: Scientific. Instruments (IOP Electronic journals), Vol 6, **377-380**, 1973
- [4] Rao, D.K., *Static Response of Stiff-Cored Unsymmetric Sandwich Beams*, Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, *391-396*, 1976
- [5] Bathe e Bolourchi, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, VOL 14, **961-986**, 1979
- [6] Borri e Merlini, **Meccanica**, Springer, Vol 21, **30-37**, 1986
- [7] Reddy, J.N., *An introduction to finite element method*, McGraw-Hill Co NY, 2nd Ed, 1993
- [8] S. Wojciech and I. Adamiec-Wójcik, *Experimental and computational analysis of large amplitude vibrations of spatial viscoelastic beams*, Acta Mechanica Springer, Wien, Vol 106, Numbers 3-4, 1994
- [9] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminate Composite Plates*, CRC Press, Boca Raton, NJ, 1996
- [10] M. Ghanbari and J. F. Dunne, *An experimentally verified non-linear damping model for large amplitude random vibration of a clamped / clamped beam*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, Vol. 215, Issue 2, **343-379**, 1998
- [11] M.Z. Wang and M.E. Kassner, *Tensile and Fatigue Properties of Aluminum Alloy Sheet 6022* M.Z. Wang and M.E. Kassner, Journal of Materials Engineering and Performance, Vol. 11(2), **166, 168**, 2002.
- [12] Rui Pedro Ramos Cardoso, *Desenvolvimento de elementos de casca de integração reduzida com modelos materiais anisotrópicos para processos de conformação plástica de chapa*, Tese de Doutorado, DEM-UA, 2002
- [13] K. Kanaka Raju and G. Venkateswara Rao, *Towards improved evaluation of large amplitude free-vibration behaviour of uniform beams using multi-term admissible*

- functions - Short Communication*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 282, Issues 3-5, **1238-1246**, 2005
- [14] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. and Zhu, J. Z., *The Finite Element Method; its basis & Fundamentals*, Elsevier, Oxford, UK, 6th Ed, 2006
- [15] J.R. Fonseca and P. Ribeiro, *Beam p-version finite element for geometrically non-linear vibrations in space*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, Vol. 195, Issues 9-12, **905-924** , 2006
- [16] Morlier J., Mesnard M., Cid M, *Pole-vaulting: identification of the pole local bending rigidities by an updating technique*, Journal of Applied Biomechanics, Thomas S. Buchanan Ed., Vol 24 N^o2, **140-148** 2008
- [17] Albanesi *etal*, *Mecánica Computacional Vol XXVII*, **1049-1061** (artículo completo; Alberto Cardona, Mario Storti, Carlos Zuppa (Eds.) San Luis, Argentina, 2008
- [18] Moreira, Melo, Rodrigues, *Static and dynamic characterization of composition cork for sandwich beam cores*, Journ. of Materials Science, Springer, March 2010 (DOI 10.1007/s10853-010-4356-0, available on-line document)

ANEXOS

Apêndice A

Flexão de viga encastrada com força transversal no extremo livre

A.1 Euler-Bernoulli

A.2 Timoshenko-Mindlin

Tabela A.1: Flexão de viga encastrada com força transversal no extremo livre (elemento de Euler-Bernoulli)

<i>Coord X(m)</i>	<i>Y(m)</i>
0.00E+00	0.00E+00
4,80E-02	8,71E-04
9,59E-02	3,44E-03
0,143767	7,62E-03
0,191459	1,33E-02
0,238972	2,05E-02
0,286277	2,91E-02
0,333352	3,90E-02
0,380179	5,01E-02
0,426746	6,24E-02
0,473046	7,58E-02
0,519075	9,02E-02
0,564834	0,105463
0,610329	0,121628
0,655566	0,138581
0,700558	0,156252
0,745318	0,174571
0,789863	0,19347
0,834212	0,212882
0,878384	0,232741
0,922402	0,25298
0,96629	0,273535
1,010073	0,294342
1,053775	0,315338
1,097424	0,33646
1,141046	0,357644

Tabela A.2: Flexão de viga encastrada com força transversal no extremo livre (elemento de Timoshenko-Mindlin)

<i>Coord X(m)</i>	<i>Y(m)</i>
0,00E+00	0,00E+00
4,80E-02	8,67E-04
9,60E-02	3,43E-03
0,143922	7,61E-03
0,19173	1,33E-02
0,239391	2,05E-02
0,286874	2,91E-02
0,334155	3,90E-02
0,381215	5,02E-02
0,428041	6,25E-02
0,474623	7,58E-02
0,520958	9,02E-02
0,567044	0,105547
0,612886	0,121735
0,658489	0,138715
0,703864	0,156415
0,749023	0,174766
0,793982	0,193699
0,838756	0,213147
0,883365	0,233043
0,92783	0,253322
0,972173	0,273919
1,016416	0,294769
1,060585	0,315808
1,104702	0,336974
1,148795	0,358203

Apêndice B

Viga encastrada sob flexão pura

B.1 Formulação Hermitiana

B.2 Formulação Timoshenko-Mindlin

Tabela B.1: Viga encastrada sob flexão pura ($100Nm$), (Hermitiana) momento aplicado em 10 incrementos ($10Nm$ cada)

<i>Coord X(m)</i>	<i>Y(m)</i>
0,00E+00	0,00E+00
4,80E-02	7,50E-04
9,59E-02	3,00E-03
0,143816	6,75E-03
0,191558	1,20E-02
0,239132	1,87E-02
0,286496	2,69E-02
0,33361	3,66E-02
0,380432	4,78E-02
0,426923	6,04E-02
0,473042	7,44E-02
0,51875	8,99E-02
0,564008	0,106767
0,60878	0,125055
0,653027	0,144724
0,696713	0,165758
0,739803	0,188136
0,782261	0,211839
0,824055	0,236845
0,86515	0,263132
0,905517	0,290677
0,945123	0,319456
0,983938	0,349445
1,021935	0,380617
1,059085	0,412948
1,095362	0,446409

Tabela B.2: Viga encastrada sob flexão pura ($100Nm$), (Timoshenko-Mindlin) momento aplicado em 10 incrementos ($10Nm$ cada)

<i>Coord X(m)</i>	<i>Y(m)</i>
0,00E+00	0,00E+00
4,80E-02	7,50E-04
9,60E-02	3,00E-03
0,14392	6,75E-03
0,191737	1,20E-02
0,239405	1,87E-02
0,286877	2,69E-02
0,334113	3,66E-02
0,381069	4,78E-02
0,427703	6,04E-02
0,473972	7,44E-02
0,519837	8,99E-02
0,565255	0,10678
0,610187	0,125072
0,654594	0,144747
0,698436	0,165787
0,741677	0,188172
0,784278	0,211883
0,826203	0,236897
0,867417	0,263193
0,907885	0,290747
0,947574	0,319535
0,98645	0,349532
1,024483	0,380711
1,06164	0,413045
1,097893	0,446508

Apêndice C

Verificação experimental

C.1 Formulação Hermitiana

C.2 Formulação Timoshenko-Mindlin

Tabela C.1: Resultado numérico, modelo ensaiado (Hermitiana)

<i>Coord X(m)</i>	<i>Y(m)</i>
0,00E+00	0,00E+00
1,20E-02	1,15E-04
2,50E-02	4,36E-04
3,60E-02	1,04E-03
4,80E-02	1,81E-03
6,09E-02	2,74E-03
7,29E-02	3,92E-03
8,48E-02	5,30E-03
9,67E-02	6,87E-03
0,108597	8,62E-03
0,120456	1,05E-02
0,13229	1,26E-02
0,145132	1,48E-02
0,15691	1,72E-02
0,168659	1,98E-02
0,180379	2,25E-02
0,192068	2,54E-02
0,203727	2,84E-02
0,215357	3,15E-02
0,226956	3,47E-02
0,239604	3,79E-02
0,251144	4,14E-02
0,262656	4,49E-02
0,27414	4,86E-02
0,285596	5,24E-02
0,297027	5,62E-02
0,308433	6,02E-02
0,319816	6,42E-02
0,332292	6,81E-02
0,343631	7,22E-02
0,35495	7,64E-02
0,366252	8,07E-02
0,377537	8,50E-02
0,388807	8,93E-02
0,400065	9,37E-02
0,411311	9,82E-02
0,423686	0,102357
0,434915	0,106828
0,446139	0,111315
0,457359	0,115812
0,468577	0,120315

Tabela C.2: Resultado numérico, modelo ensaiado (Timoshenko-Mindlin)

<i>Coord X(m)</i>	<i>Y(m)</i>
0,00E+00	0,00E+00
1,20E-02	1,14E-04
2,50E-02	4,35E-04
3,60E-02	1,04E-03
4,80E-02	1,81E-03
6,10E-02	2,73E-03
7,29E-02	3,92E-03
8,49E-02	5,30E-03
9,68E-02	6,87E-03
0,108745	8,62E-03
0,120639	1,06E-02
0,132509	1,27E-02
0,14539	1,48E-02
0,157211	1,72E-02
0,169005	1,98E-02
0,180772	2,25E-02
0,192512	2,54E-02
0,204224	2,84E-02
0,215908	3,15E-02
0,227565	3,48E-02
0,240273	3,79E-02
0,251875	4,14E-02
0,26345	4,50E-02
0,275	4,87E-02
0,286524	5,24E-02
0,298024	5,63E-02
0,309501	6,02E-02
0,320956	6,43E-02
0,333505	6,81E-02
0,344919	7,23E-02
0,356315	7,65E-02
0,367694	8,08E-02
0,379057	8,51E-02
0,390406	8,94E-02
0,401744	9,38E-02
0,41307	9,83E-02
0,425526	0,10247
0,436837	0,106947
0,448142	0,11144
0,459444	0,115944
0,470744	0,120453